Devoir Surveillé n°3

ECE3 Lycée Carnot

6 décembre 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans ce premier exercice, tous les résultats devront être justifiés par des raisonnements clairs (ce qui ne signifie pas nécessairement longs).

Par une belle matinée de décembre, un certain nombre d'usagers essayent de se caser dans une rame du métro qui, fait exceptionnel, arrive sur le quai complètement vide.

1. On suppose pour l'instant que la rame est constituée d'un seul wagon, contenant 10 places assises (qui sont évidemment distinguables) et 20 places debout (qui, elles, ne sont pas distinguables).
   (a) Six personnes entrent dans le wagon et décident toutes de s'asseoir. De combien de façons peut-on les placer ?
   (b) Sur les six personnes, deux décident de rester debout. Combien y a-t-il désormais de dispositions possibles ?
   (c) Combien y aurait-il de dispositions si quinze personnes voulaient monter dans le wagon, dont 10 qui s'asseoient ? Et si seulement 8 s'assoient ?
   (d) Revenons au cas de six personnes. Parmi ces six personnes, se trouve un couple qui veut s'asseoir côte à côte. On suppose que les dix places assises sont réparties en cinq paires de places côte à côte, et que tout le monde s'asseoit. Je suppose que vous êtes capables de deviner la question.
   (e) On reprend 15 personnes parmi lesquelles se trouve le couple précédent, qui peut soit prendre deux places assises côte à côte, soit rester debout (tous les deux). Combien de dispositions si 10 personnes s'assoient ? Et si 8 seulement s'assoient ?
2. On suppose désormais que la rame est constituée de deux wagons, contenant chacun 10 places assises réparties en cinq paires (et pour cette question, personne ne sera debout).
   (a) Quinze personnes montent dans la rame. Combien de dispositions possibles au total ?
   (b) Combien de dispositions avec 6 personnes dans la première rame et 9 dans la deuxième ?
   (c) Parmi les quinze voyageurs se trouvent deux couples qui veulent s'asseoir côte à côte (mais pas forcément dans la même rame). Combien de dispositions y a-t-il désormais ?
   (d) Parmi les quinze voyageurs se trouve un groupe de six personnes qui veut s'installer sur trois paires de sièges côte à côte (mais peu importe qui est à côté au sein du groupe, et ils peuvent se mettre dans des rames différentes). Toujours la même question.
3. Dans cette dernière question, la rame de métro contient quatre wagons, chacun contenant 10 places assises.
   (a) Quatre personnes montent dans la rame. Combien de dispositions possibles ?
   (b) Les quatre personnes montent chacune dans une rame différente. Combien de dispositions possibles ?

(c) Combien y a-t-il de dispositions où les deux premiers wagons sont vides ?

(d) Combien de dispositions où il y a exactement deux wagons vides ?

(e) Combien de dispositions avec trois wagons vides ?

(f) En déduire le nombre de dispositions avec exactement un wagon vide. Quel est la quantité de wagons vides la plus probable ?

(g) Pour cette ultime question, 6 personnes montent successivement dans le métro et choisissent toujours de s'installer dans l'un des deux wagons les moins remplis (à égalité, par exemple si les quatre wagons contiennent le même nombre de voyageurs, ils montent dans un wagon au hasard). Combien de dispositions possibles dans ce cas de figure ?

Exercice 2 (d'après EDHEC 97)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (variations et limites notamment).

   (b) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f_n.

   (c) Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.

   (d) Expliquer pourquoi, si $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n (u_n étant la plus petite des deux), qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.

2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $u_n \in]1; e[$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

   (c) En utilisant un encadrement de $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$, en déduire un équivalent simple de $u_n - 1$.

3. (a) Déterminer la limite de la suite (v_n).

   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$, en déduire que $n\ln(n) < v_n$.

   (c) En étudiant la fonction $g : x \mapsto x - 2\ln(x)$, montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n > 2\ln(n)$.

   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

   (e) En déduire un équivalent simple de $\ln(v_n)$.

Problème

Dans tout ce problème, (a_n) étant une suite de réels positifs, on lui associe une suite (b_n) de la façon suivante : $b_0 = \sqrt{a_0}$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + b_n}$. Dans les trois premières parties du problème, on étudiera des cas particuliers de suites (a_n). Dans la dernière partie, on essaiera de déterminer le comportement de (b_n) dans le cas où (a_n) est une suite croissante.

I.Cas d'une suite (a_n) constante.

On suppose dans toute cette partie que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$.

1. Calculer les valeurs de b_0, b_1 et b_2, et montrer que $b_0 < b_1 < b_2$.
2. On définit une fonction f par $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Dresser le tableau de variations de f, résoudre l'équation $f(x) = x$, et étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'ensemble de définition de f.

3. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \left[1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, puis prouver que la suite (b_n) est croissante.
4. En déduire la convergence de (b_n), et déterminer sa limite, qu'on notera désormais l.
5. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $l - \sqrt{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}(l-x)$ (on pourra penser à la quantité conjuguée, et utiliser le fait que $f(l) = l$).
6. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l - b_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(l - b_n)$, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $l - b_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
7. Écrire un programme Pascal qui détermine une valeur approchée de l à ε près (choisi par l'utilisateur), en effectuant le calcul de b_n jusqu'à avoir $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$.

II.Cas d'une suite périodique.

On suppose désormais que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = 1$.

1. Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4. La suite semble-t-elle monotone ?
2. On s'intéresse désormais uniquement aux termes d'indices pairs de la suite (b_n). Autrement dit, on pose $c_n = b_{2n}$. Déterminer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. Montrer par récurrence que la suite (c_n) est croissante.
4. Montrer que (c_n) est majorée par 2. En déduire la convergence de la suite (b_{2n}).
5. Montrer, en exprimant b_{2n+1} en fonction de b_{2n+2}, que la suite (b_n) ne peut pas être convergente.

III.Un autre cas particulier.

On suppose désormais que $a_n = n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n+1} \leqslant n+1$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leqslant b_n \leqslant n$. Quelle est la limite de la suite (b_n) ?
3. Exprimer $\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ en fonction de n et de b_n.
4. En déduire que $b_n \leqslant \sqrt{2n}$, puis un équivalent simple de (b_n).

IV.Un cas plus général

On suppose dans cette partie que la suite (a_n) est croissante.

1. Montrer que si (b_n) converge, alors (a_n) converge également.
2. On suppose désormais, pour toute la fin du problème, que (a_n) est convergente vers une certaine limite a. Prouver alors que (b_n) est une suite croissante.
3. Montrer qu'il existe un unique réel $b > 0$ tel que $b = \sqrt{a+b}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant b$.
5. En déduire que (b_n) converge, et exprimer sa limite en fonction de a.