Révisions DS2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 novembre 2010

Exercice 1 (calculs divers)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{9}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{9}\right)^k - 1 = \frac{1-(\frac{2}{9})^{n+1}}{1-\frac{2}{9}} - 1 = \frac{9}{7} - \frac{9}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} - 1 = \frac{2}{7} - \frac{2^{n+1}}{7 \times 9^n}$.

2. Constatant que $\dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{a(k+1)+b(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{(a+b)k+a-b}{(k-1)(k+1)}$, l'égalité sera vérifiée si $a+b=0$ et $a-b=1$, donc $b=-a$ et $2a=1$, soit $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$. On calcule ensuite $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{k=n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Calculons : $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} i^3 + 3i^2j + 3ij^2 + j^3 = \sum_{i=1}^{i=n} ni^3 + 3\frac{n(n+1)}{2}i^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}i + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = n\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^3(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(3n+1)}{2}$.

4. Pour $n=1$, la somme de gauche se réduit à $\dfrac{1}{2}$, et l'expression de droite vaut $2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$, donc l'égalité est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n. On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{n+1-2(n+2)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$, ce qui est la formule attendue pour le rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2

1. On a $v_{n+2} = 3v_{n+1} - u_{n+1} = 3v_{n+1} - 2v_n$.

2. La suite (v_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2-3x+2=0$ a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$ et admet donc deux racines $r = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $s = \dfrac{3-1}{2} = 1$. On en déduit que $v_n = \alpha 2^n + \beta$, les réels α et β devant vérifier $\alpha+\beta = v_0 = 1$ et $2\alpha+\beta = v_1 = 3v_0 - u_0 = 5$. En soustryant les deux relations, on obtient $\alpha = 4$, puis $\beta = 1-\alpha = -3$. On a

donc $v_n = 4\times 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2v_{n-1} = 2(2^{n+1} - 3) = 2^{n+2} - 6$. On constate aisément que pour $n = 0$, $2^{0+2} - 6 = -2 = u_0$, donc la formule est en fait valable pour tout entier n.

3. Constatons que $v_{n+1} - u_{n+1} = 3v_n - u_n - 2v_n = v_n - u_n$. La suite est donc constante, égale à $v_0 - u_0 = 3$.
4. Puisque $v_n - u_n = 3$, on peut écrire la relation de récurrence pour la suite u_n de la façon suivante : $u_{n+1} = 2(u_n + 3) = 2u_n + 6$. La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 2x + 6$, soit $x = -6$. On pose donc $z_n = u_n + 6$, et on a $z_{n+1} = u_{n+1} + 6 = 2u_n + 12 = 2(u_n + 6) = 2z_n$. La suite (z_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $z_0 = u_0 + 6 = 4$. On a donc $z_n = 4\times 2^n = 2^{n+2}$, puis $u_n = z_n - 6 = 2^{n+2} - 6$.
5. Encore un petit calcul : $2v_{n+1} - u_{n+1} = 2(3v_n - u_n) - 2v_n = 6v_n - 2u_n - 2v_n = 4v_n - 2u_n = 2(2u_n - v_n)$. La suite $(2u_n - v_n)$ est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $2v_0 - u_0 = 4$, donc $2v_n - u_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$.

Exercice 3

1. On a $u_3 = 27$; $u_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = 64$ et $u_5 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$.
2. Calcul facile : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} 2k - 1 = 2\sum_{k=1}^{k=N} k - N = N(N+1) - N = N^2$.
3. Il y en a $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Puisque les entiers additionnés sont les entiers impairs, c'est-à-dire ceux de la forme $2k - 1$, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\frac{n(n+1)}{2}} (2k-1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Par définition des sommes partielles, on a $u_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{(n-1)^2n^2}{4} = \dfrac{n^2}{4}((n+1)^2 - (n-1)^2) = \dfrac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1) = \dfrac{n^2}{4} \times 4n = n^3$. On a donc prouvé que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4

1. Petite récurrence : c'est vrai au rang 0 puisque $4 > 2$. Supposons l'inégalité vraie pour u_n, alors $u_n - 2 > 0$, donc $(u_n - 2)^2 > 0$, et $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2 > 2$, donc la propriété est héréditaire, et vraie pour tout entier n.
2. Comme $u_{n+1} - 2 = 2(u_n - 2)^2$, on aura $\ln(u_{n+1} - 2) = \ln 2 + 2\ln(u_n - 2)$, soit $v_{n+1} = 2v_n + \ln 2$. Cette suite est bien arithmético-géométrique, elle a pour équation de point fixe $x = 2x + \ln 2$, ce qui donne $x = -\ln 2$. Posons donc $w_n = v_n + \ln 2$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} + \ln 2 = 2v_n + 2\ln 2 = 2w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = v_0 + \ln 2 = \ln(4 - 2) + \ln 2 = 2\ln 2$. On en déduit que $w_n = 2\ln 2 \times 2^n = 2^{n+1}\ln 2$, puis que $v_n = w_n - \ln 2 = (2^{n+1} - 1)\ln 2$, et enfin $u_n = e^{v_n} + 2 = 2^{2^{n+1}-1} + 2$.

3. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} v_k = \ln 2 \sum_{k=0}^{k=n} 2^{k+1} - 1 = 2\ln 2 \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - (n+1)\ln 2 = 2\ln 2 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1)\ln 2 = \ln 2(2^{n+2} - 2 - n - 1) = (2^{n+2} - n - 3)\ln 2$.
4. On aura $\displaystyle\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2)\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_k - 2) = \sum_{k=0} k = nv_k = (2^{n+2} - n - 3)\ln 2$, donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2) = e^{(2^{n+2}-n-3)\ln 2} = 2^{2^{n+2}-n-3}$.
5. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2$. Pour $n = 0$, on a $2^{2^1-1} + 2 = 2^1 + 2 = 4 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons, pour un certain entier n, la propriété P_n vérifiée. On a alors $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2 = 2(2^{2^{n+1}-1} + 2 - 2)^2 + 2 = 2 \times 2^{2(2^{n+1}-1)} + 2 = 2^{1+2.2^{n+1}-2} + 2 = 2^{2^{n+2}-1} + 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 5

1. Le trinôme sous la racine a un discriminant strictement négatif, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$, la fonction f est donc décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
3. En multipliant par la quantité conjuguée, $f(x) - x = \dfrac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2-x+1} + x} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$. Le dénominateur étant toujours positif sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) - x$ est du signe de $1 - x$, c'est-à-dire positif sur $]0; 1]$ et négatif sur $[1; +\infty[$.
4. La fonction f étant à valeurs positives, on ne pourra avoir $f(x) = x$ que si $x \geqslant 0$. Dans ce cas, on peut élever les deux membres de l'équation au carré pour obtenir $x^2 - x + 1 = x^2$, donc $x = 1$.
5. Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 1$, au vu des variations de la fonction f, on aura toujours sur $[0; 1]$ $f(x) \leqslant 1$, donc $1 - f(x) \geqslant 0$. Pour l'autre inégalité, on peut calculer $1 - f(x) = \dfrac{1-(x^2-x+1)}{1+\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{x(1-x)}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$. Or le dénominateur admet un minimum pour $x = \dfrac{1}{2}$, égal à $1 + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{3}$. On a donc $1 - f(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$ puisque $x \leqslant 1$.
6. (a) Calculons : $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis $u_2 = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{2}$.

   (b) Une petite récurrence : c'est vrai pour u_0 qui est par hypothèse égal à $\dfrac{1}{2}$. Si on suppose que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, au vu du tableau de variations de f, on aura $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme $\sqrt{3} > 1$, a fortiori $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.

(c) On a vu à la question 3 que $f(x)-x$ était positif sur $]0;1]$. Comme u_n appartient toujours à cet intervalle, on aura toujours $f(u_n) \geqslant u_n$, soit $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

(d) C'est une simple application de la question 5, avec $x = u_n$.

(e) L'inégalité de gauche a déjà été prouvée, prouvons donc par récurrence que $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$. Pour $n = 0$, l'inégalité revient à dire que $1-u_0 \leqslant u_0$, ce qui est vrai avec $u_0 = \frac{1}{2}$. Supposons donc l'inégalité vraie au rang n, on a alors $1-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}(1-u_n)$ (question précédente) et $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$, d'où $1 - u_{n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} u_0$. La formule est donc vraie au rang $n = 1$ et, par principe de récurrence, pour tout entier n.

(f) Il suffit d'avoir $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0 \leqslant 10^{-10}$, soit en passant au logarithme $-10\ln 10 \geqslant -n\ln\sqrt{3} - \ln 2$, donc $n \geqslant \frac{20\ln 10 - 2\ln 2}{\ln 3}$.