

Révisions pour le DS2

ECE3 Lycée Carnot

24 octobre 2011

Exercice 1 : Calculs divers

1. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{2k}}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1}$.
3. Calculer et simplifier la somme double $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^3$.
4. Prouver par récurrence que, $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = 3v_n - u_n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.
2. Déterminer à l'aide de la relation précédente l'expression du terme général de la suite (v_n) , puis celui de la suite (u_n) .
3. Montrer (sans utiliser les résultats de la question 2.) que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite constante et déterminer sa valeur.
4. En déduire une relation de récurrence arithmético-géométrique vérifiée par la suite (u_n) , et retrouver la valeur de u_n à l'aide de cette relation.
5. Démontrer, toujours sans utiliser les questions précédentes, que la suite $(2v_n - u_n)$ est géométrique, et déterminer son terme général.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de retrouver la formule vue en cours pour la somme des cubes des n premiers entiers, mais par une méthode différentes. On définit pour cela la suite (u_n) de la façon suivante : $u_1 = 1$; $u_2 = 3 + 5$; $u_3 = 7 + 9 + 11$ etc (le terme d'indice n de la suite est la somme des n premiers entiers impairs qui ne sont pas apparus dans l'écriture des termes précédents de la suite).

- Déterminer la valeur de u_3 , u_4 et u_5 .
- Calculer, pour tout entier naturel N , la valeur de $\sum_{k=1}^{k=N} (2k - 1)$ (vous avez le droit pour cette question d'utiliser les résultats sur les sommes classiques vus en cours).
- La somme partielle d'indice n de la suite (u_n) , définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$, vaut $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + \dots$. Combien d'entiers impairs y a-t-il dans cette somme ?
- À l'aide du calcul de la question 2., en déduire la valeur de S_n .
- Déterminer en utilisant le résultat précédent une expression simple pour u_n , et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2$.

- Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n - 2)$. Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
- Déterminer l'expression explicite de v_n , et en déduire celle de u_n .
- Calculer les sommes partielles de la suite (v_n) .
- En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{k=n} (u_k - 2)$.
- Démontrer par récurrence (sans utiliser les questions précédentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Calculer la dérivée f' de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- Montrer que, $\forall x \neq 0$, $f(x) - x = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$.
- Montrer que, $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - x)$.
- On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Calculer u_1 et u_2 .
 - Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
 - Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - u_n)$.
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$ (on pourra procéder par récurrence).
 - Déterminer à l'aide de l'encadrement précédent une valeur de l'entier n pour laquelle $1 - u_n \leq 10^{-10}$.