Devoir Surveillé n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

10 novembre 2011

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{2^k\times 3^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{2^k}\times\sqrt{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{2})^k\times 3^k = \sum_{k=1}^{k=n}(3\sqrt{2})^k = \sum_{k=0}^{k=n}(3\sqrt{2})^k - 1$
$\displaystyle = \frac{1-(3\sqrt{2})^{n+1}}{1-3\sqrt{2}} - 1 = \frac{(1+3\sqrt{2})(1-(3\sqrt{2})^{n+1})}{1-(3\sqrt{2})^2} - 1 = \frac{1+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}^{n+1}-(3\sqrt{2})^{n+2}}{-17} - 1 =$
$\displaystyle\frac{(3\sqrt{2})^{n+2}+(3\sqrt{2})^{n+1}-3\sqrt{2}-18}{17}$.

2. C'est une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=999}\frac{1}{k^2}-\frac{2}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{k=999}\frac{1}{k^2}-2\sum_{k=2}^{k=1000}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=3}^{k=1001}\frac{1}{k^2} =$
$\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\sum_{k=3}^{k=999}\frac{1}{k^2}-2\times\frac{1}{2^2}-2\sum_{k=3}^{k=999}\frac{1}{k^2}-2\times\frac{1}{1000^2}+\sum_{k=3}^{k=999}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{1000^2}+\frac{1}{1001^2} = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{1000^2}+$
$\displaystyle\frac{1}{1001^2} = \frac{3}{4}-\frac{1001^2-1000^2}{1000^2\times 1001^2} = \frac{3}{4}-\frac{2001}{1001000^2}$. Bon, on ne va peut-être pas pousser le calcul plus loin...

3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j=1}\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{j}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

4. L'équation caractéristique de cette suite est donc $x^3-2x^2-x+2=0$. On constate que $x=1$ est racine évidente de l'équation, donc $x^2-2x^2-x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, on obtient $a=1$, $b-a=-2$ donc $b=-1$ et $c-b=-1$, donc $c=-2$. On en déduit que $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta=1+8=9$, donc admet deux racines $x_1=\dfrac{1+3}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1$. L'équation caractéristique admet donc trois racines distinctes 1, -1 et 2, et on peut alors écrire u_n sous la forme $u_n=\alpha+\beta(-1)^n+\gamma 2^n$. En utilisant les trois premiers termes de la suite, on obtient les conditions $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha-\beta+2\gamma=1$ et $\alpha+\beta+4\gamma=2$. La soustraction de la première équation à la troisième donne immédiatement $3\gamma=2$, donc $\gamma=\dfrac{2}{3}$. La somme des deux premières équations donne $2\alpha+3\gamma=1$, donc $2\alpha=1-3\gamma=1-2=-1$, et $\alpha=-\dfrac{1}{2}$. Reste à reprendre la première équation pour trouver $\beta=-\alpha-\gamma=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$. Conclusion : $u_n=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-1)^n}{6}+\dfrac{2^{n+1}}{3}$.

Exercice 2

1. Notons que la condition $u_n\geqslant 3$ est indispensable pour que la suite soit bien définie. Elle se prouve par une simple récurrence : l'initialisation est donnée par l'énoncé, et en supposant $u_n\geqslant 3$, $u_n-3\geqslant 0$, donc $\sqrt{u_n-3}$ existe et est positif. on en déduit facilement que $u_{n+1}=3+2\sqrt{u_n-3}\geqslant 3$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Tous les termes de la suite sont donc supérieurs ou égaux à 3.

2. La suite est constante si $u_1 = u_0$ (ensuite, la relation de récurrence étant toujours la même, tous les termes seront aussi égaux), donc si $3+2\sqrt{u_0-3} = u_0$, ou encore $2\sqrt{u_0-3} = u_0-3$. On peut élever tout ceci au carré (tout est positif) pour obtenir $4(u_0-3) = u_0^2 - 6u_0 + 9$, soit $u_0^2 - 10u_0 + 21 = 0$. Cette équation du deuxième degré a pour discriminant $\Delta = 100 - 84 = 16$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{10+4}{2} = 7$ et $x_2 = \dfrac{10-4}{2} = 3$. La suite sera donc constante si $u_0 = 3$ ou $u_0 = 7$.

3. C'est en fait le même principe que ci-dessus, l'inéquation n'a de sens que si $x \geqslant 3$ (à cause de la racine carrée) et on peut écrire $x - 3 \leqslant 2\sqrt{x-3}$. En élevant au carré (tout est positif) et en réarrangeant comme à la question précédente, on obtient $x^2 - 10x + 21 \leqslant 0$, ce qui se produit entre les racines, c'est-à-dire si $x \in [3;7]$.

4. Montrons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n \geqslant 7$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. Pour $n = 0$, $u_0 \geqslant 7$ est supposé dans l'énoncé, et comme $u_0 \geqslant 7$, on aura d'après la question précédente $u_0 \geqslant 3+2\sqrt{u_0+3}$, soit $u_0 \geqslant u_1$, ce qui prouve P_0. supposons désormais que $u_n \geqslant 7$ (et que $u_n \geqslant u_{n+1}$, mais ça ne va pas nous servir pour l'hérédité), alors $u_n - 3 \geqslant 4$, donc $\sqrt{u_n-3} \geqslant 2$, puis $3 + 2\sqrt{u_n-3} \geqslant 3 + 2 \times 2 = 7$, donc $u_{n+1} \geqslant 7$. De plus, comme $u_{n+1} \geqslant 7$, en reprenant la question précédente, $u_{n+1} \geqslant 3 + 2\sqrt{u_{n+1}+3}$, donc $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée et, par principe de récurrence, la suite est décroissante et minorée par 7 (avec les connaissances que nous avons maintenant, nous pouvons en déduire que la suite sera nécessairement convergente).

5. (a) Calculons donc : $u_1 = 3 + 2\sqrt{4-3} = 3 + 2 = 5$, puis $u_2 = 3 + 2\sqrt{5-3} = 3 + 2\sqrt{2}$, et $u_3 = 3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2} - 3} = 3 + 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} = 3 + 2^{\frac{7}{4}}$.

   (b) Calculons $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(3 + 2\sqrt{u_n - 3} - 3) = \ln(2\sqrt{u_n-3}) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln(u_n - 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est bien arithmético-géométrique.

   (c) Calculons donc celui de (v_n) pour commencer. L'équation de point fixe est $\alpha = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\alpha$, ce qui donne $\alpha = 2\ln 2$. On définit donc la suite auxiliaire $w_n = v_n - 2\ln 2$. Vérifions que (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\ln 2 = \ln 2 + \dfrac{1}{2}v_n - 2\ln 2 = \dfrac{1}{2}v_n - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(v_n - 2\ln 2) = \dfrac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\ln 2 = \ln(u_0 - 3) - 2\ln 2 = \ln 1 - 2\ln 2 = -2\ln 2$. On a donc $w_n = -2\ln 2 \times \dfrac{1}{2^n}$, puis $v_n = w_n + 2\ln 2 = 2\ln 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$, et enfin $u_n = e^{v_n} + 3 = 3 + e^{(1-\frac{1}{2^n})\ln 4} = 3 + 4^{1-\frac{1}{2^n}}$.

   (d) Allons-y pour une démonstration par récurrence de la propriété P_n : $u_n = 3 + 4^{1-\frac{1}{2^n}}$. Si $n = 0$, $3 + 4^{1-\frac{1}{2^0}} = 3 + 4^{1-1} = 3 + 1 = 4 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons la formule vraie au rang n, alors $u_{n+1} = 3 + 2\sqrt{u_n - 3} = 3 + 2\sqrt{3 + 4^{1-\frac{1}{2^n}} - 3} = 3 + \sqrt{4}\sqrt{4^{1-\frac{1}{2^n}}} = 3 + \sqrt{4^{1+1-\frac{1}{2^n}}} = 3 + \left(4^{2-\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3 + 4^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$. Nous venons d'obtenir la formule prouvant P_{n+1}. Par principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tous les termes de la suite.

Exercice 3

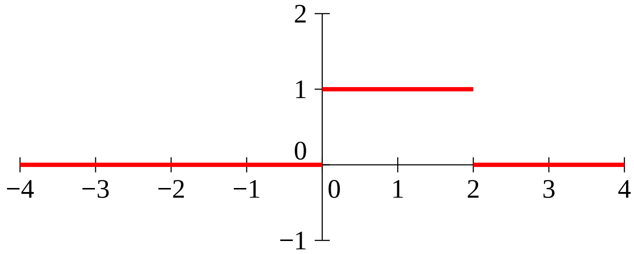
1. Une question gentille pour faire croire que l'exercice était facile : $A \cup B = [0;3]$, $A \cap B = [1;2]$, $\overline{A} =]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ et $A \backslash B = [0;1[$.

2. Puisque $A \cap B = [1;2]$, $A \star B =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$. Comme $A \cap A = A = [0;2]$, on a $A \star A = \overline{A} =]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$. de même, on aurait $B \star B = \overline{B} =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$, donc $(A \star A) \cap (B \star B) =]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$, puis $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{(A \star A) \cap (B \star B)} = [0;3]$. On constate que $(A \star A) \star (B \star B) = A \cup B$. Enfin, $(A \star B) \cap (A \star B) = A \star B$, donc $(A \star B) \star (A \star B) = \overline{A \star B} = [1;2] = A \cap B$.

3. On aura toujours $A \star A = \overline{A \cap A} = \overline{A}$; donc $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Mais, en utilisant les lois de Morgan, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, donc $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B$. Enfin, au vu du premier calcul effectué dans cette question, $(A \star B) \star (A \star B) = \overline{A \star B} = A \cap B$. En gros, on

peut exprimer toutes les opérations classiques sur les ensembles uniquement à partir de cette drôle d'opération $\star$.

4. La fonction est donc égale à 1 entre 0 et 2, et à 0 le reste du temps, elle ressemble à ceci :



   Cette application n'est sûrement pas injective, puisque 0 comme 1 ont une bonne grosse infinité d'antécédents par f. Par contre, elle est bel et bien surjective puisque définie comme application à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{0; 1\}$ (et que ces deux éléments ont plein d'antécédents).

5. Quand on fait le produit de $f_A(x)$ par $f_B(x)$, on est en train de multiplier deux nombres qui sont soit égaux à 0, soit à 1. Le résultat du produit sera égal à 0 dès que l'un des deux est nul, et ne vaudra donc 1 que dans le cas où $f_A(x) = 1$ et $f_B(x) = 1$, c'est-à-dire quand $x \in A$ et $x \in B$. Autrement dit, $f_A(x) \times f_B(x) = 1$ si $x \in A \cap B$, ce qui correspond exactement à la définition de $f_{A\cap B}$. Quand on passe à l'opération $\star$, il y a un complémentaire en plus à prendre en compte. Or, on se convainc facilement que $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$, puisque cette fonction vaut 0 quand f_A vaut 1 et vice-versa. Du coup, $f_{A\star B}(x) = 1 - f_A(x) \times f_B(x)$.

6. Là, ça se complique un peu niveau conceptuel. Commençons par constater que, quel que soit l'ensemble B, $A \cap B \subset A$, donc $A \star B = \overline{A \cap B} \supset \overline{A}$. Ceci empêche l'application d'être surjective puisque, par exemple, l'ensemble vide $\emptyset$ n'a pas d'antécédent par g puisqu'on n'aura jamais $A \star B = \emptyset$. L'application n'est pas non plus injective car il n'est pas très difficile de construire deux ensembles distincts B et C pour lesquels $A \star B = A \star C$, il suffit en fait d'avoir $A \cap B = A \cap C$! C'est le cas par exemple pour $B = [1; 3]$ et $C = [1; 17]$. Pour que l'application puisse être bijective, il faudrait en particulier qu'elle soit surjective, ce qui au vu du calcul effectué en début de question implique que $\overline{A} = \emptyset$ (sinon, l'ensemble vide ne pourra pas avoir d'antécédent), autrement dit $A = \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a simplement $g(B) = \overline{\mathbb{R} \cap B} = \overline{B}$, qui est bien une application bijective (dont la réciproque est d'ailleurs g elle-même).

Exercice 4

1. Du simple calcul : $u_1 = 2u_0 - v_0 - 1 = 2$; $v_1 = 2v_0 - u_0 + 3 = 3$; puis $u_2 = 1$, $v_2 = 8$, $u_3 = -5$ et $v_3 = 20$.

2.
```
PROGRAM suites;
USES wincrt;
VAR u,v,w,i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u :=2; v :=1;
FOR i :=1 TO n DO
BEGIN
w :=2*u-v+i;
v :=2*v-u+i+4;
u :=w;
END;
```

WriteLn(u,v) ;
END.

3. Calculons donc $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = 2u_n - v_n + n - 1 - 2v_n + u_n - n - 3 = 3u_n - 3v_n - 4 = 3w_n - 4$. La suite est bien arithmético-géométrique, son équation de point fixe est $\alpha = 3\alpha - 4$, ce qui donne $-2\alpha = -4$, soit $\alpha = 2$. On pose donc $x_n = w_n - 2$, et on vérifie que (x_n) est une suite géométrique : $x_{n+1} = w_{n+1} - 2 = 3w_n - 4 - 2 = 3w_n - 6 = 3x_n$. La suite (x_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $x_0 = w_0 - 2 = u_0 - v_0 - 2 = -1$, donc $x_n = -3^n$. On en déduit que $w_n = x_n + 2 = 2 - 3^n$.

4. Calculons donc $z_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} + a(n+1)^2 = 2u_n - v_n + n - 1 + 2v_n - u_n + n + 3 + an^2 + 2an + a = u_n + v_n + an^2 + (2+2a)n + a + 2 = z_n + (2+2a)n + a + 2$. Ceci est une relation de récurrence arithmétique si $2 + 2a = 0$, c'est-à-dire si $a = -1$. La suite (z_n) définie par $z_n = u_n + v_n - n^2$ vérifie donc la relation $z_{n+1} = z_n + 1$, c'est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $z_0 = u_0 + v_0 - 0^2 = 3$, donc $z_n = n + 3$.

5. Au vu des deux dernières questions, on a d'une part $u_n - v_n = w_n = 2 - 3^n$, et d'autre part $u_n + v_n = z_n + n^2 = n^2 + n + 3$. En additionnant ces deux relations, on obtient $2u_n = n^2 + n + 5 - 3^n$, donc $u_n = \dfrac{n^2 + n + 5 - 3^n}{2}$. En les soustrayant, on a $2v_n = n^2 + n + 1 + 3^n$, donc $v_n = \dfrac{n^2 + n + 1 + 3^n}{2}$

6. Calculons donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k^2 + k + 5 - 3^k}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{5(n+1)}{2} - \frac{1 - 3^{n+1}}{2(1-3)} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 3n + 30]}{12} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 30)}{12} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n + 15)}{6} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$. On ne peut pas vraiment simplifier plus que celà.

7. (a) En reprenant la relation de départ, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - v_{n+1} + n + 1 - 1 = 2u_{n+1} - 2v_n + u_n - n - 3 + n = 2u_{n+1} + u_n - 2v_n - 3$. Or, toujours en repartant de la première relation de récurrence, on peut écrire $v_n = 2u_n - u_{n+1} + n - 1$, donc $v_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 4u_n + 2u_{n+1} - 2n + 2 - 3 = 4u_{n+1} - 3u_n - 2n - 1$.

   (b) Pour alléger les calculs, on va essayer de caluler directement $t_{n+2} - 4t_{n+1} + 3t_n$, qu'on espère donc réussir à rendre nul, et qui vaut a priori $u_{n+2} + b(n+2)^2 + c(n+2) - 4u_{n+1} - 4b(n+1)^2 - 4c(n+1) + 3u_n + 3bn^2 + 3cn$. On peut remplacer, au vu de la question précédente, $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n$ par $-2n - 1$, et on obtient $t_{n+2} - 4t_{n+1} + 3t_n = -2n - 1 + bn^2 + 4bn + 4b + cn + 2c - 4bn^2 - 8bn - 4b - 4cn - 4c + 3bn^2 + 3cn = -2n - 1 - 4bn - 2c = (-2 - 4b)n - 1 - 2c$. Cette expression s'annule pout tout entier n si $-2 - 4b = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{2}$, et $-1 - 2c = 0$, donc $c = -\dfrac{1}{2}$. La suite auxiliaire recherchée est donc $t_n = u_n - \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n$.

   (c) On vient de prouver que (t_n) était récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 - 4x + 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $s = \dfrac{4-2}{2} = 1$. On en déduit que $t_n = \alpha 3^n + \beta$. Pour déterminer α et β, on calcule $t_0 = u_0 = 2$ et $t_1 = u_1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$. On a donc les relations $\alpha + \beta = 2$ et $3\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les relations, on obtient $2\alpha = -1$, soit $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\beta = 2 - \alpha = \dfrac{5}{2}$. Conclusion : $t_n = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3^n}{2}$, puis $u_n = t_n + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n = \dfrac{n^2 + n + 5 - 3^n}{2}$.
   Pour retrouver v_n, on ne peut échapper à un dernier calcul, en reprenant par exemple le résultat $v_n = 2u_n - u_{n+1} + n - 1 = n^2 + n + 5 - 3^n + \dfrac{3^{n+1} - (n+1)^2 - (n+1) - 5}{2} + n - 1 = \dfrac{2n^2 + 2n + 10 - 2 \times 3^n + 3 \times 3^n - n^2 - 2n - 1 - n - 6 + 2n - 2}{2} = \dfrac{3^n + n^2 + n + 1}{2}$.
   On retrouve évidemment les mêmes formules que par l'autre méthode.