Devoir Surveillé n°2

ECE3 Lycée Carnot

10 novembre 2011

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les différentes questions de ce premier exercice sont totalement indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{2^k \times 3^{2k}}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=999} \frac{1}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2}$ (les plus courageux essaieront de simplifier le résultat).
3. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$.
4. On admet pour cette question que la méthode vue en cours pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 reste valable pour l'ordre 3 : si (u_n) vérifie la relation $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$, alors $u_n = \alpha r^n + \beta s^n + \gamma t^n$, où r, s et t sont les trois racines de l'équation du troisième degré $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$, et α, β et γ trois coefficients déterminés à l'aide des premiers termes de la suite (tout ceci étant valable uniquement si l'équation caractéristique admet trois solutions distinctes).

   Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \geqslant 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + 2\sqrt{u_n - 3}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$.
2. Déterminer pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) sera constante.
3. Résoudre l'inéquation $x \leqslant 3 + 2\sqrt{x-3}$.
4. En déduire que, si $u_0 \geqslant 7$, la suite (u_n) sera décroissante et minorée par 7 (on pourra faire une récurrence simultanée pour les deux propriétés).
5. (a) On suppose pour toute la fin de l'exercice que $u_0 = 4$. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \ln(u_n - 3)$. Déterminer une relation de récurrence arithmético-géométrique vérifiée par la suite (v_n).
   (c) En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n).
   (d) Démontrer par récurrence (sans utiliser les questions précédentes) que, si $u_0 = 4$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 + 4^{1 - \frac{1}{2^n}}$.

Exercice 3

On se place pour tout l'exercice dans $E = \mathbb{R}$ et on s'intéresse particulièrement aux deux sous-ensembles $A = [0; 2]$ et $B = [1; 3]$.

1. Exprimer sous la forme la plus simple possible $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ et $A \backslash B$.
2. On définit, pour deux ensembles quelconques A et B, une nouvelle opération $\star$ définie par $A \star B = \overline{A \cap B}$. Déterminer ce que valent $A \star B$, $A \star A$, $(A \star A) \star (B \star B)$ et $(A \star B) \star (A \star B)$ (pour cette question, A et B sont les ensembles définis en début d'exercice).
3. Généraliser les résultats précédents en exprimant le plus simplement possible $A \star A$, $(A \star A) \star (B \star B)$ et $(A \star B) \star (A \star B)$ lorsque A et B sont maintenant deux ensemble quelconques.
4. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on définit maintenant une fonction $f_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$ appelée fonction indicatrice de l'ensemble A et définie de la façon suivante : $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Dessiner la représentation graphique de la fonction f_A lorsque $A = [0; 2]$. Cette application est-elle injective ? Surjective ?
5. Expliquer pourquoi on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \times f_B(x)$. Exprimer de façon similaire la fonction $f_{A \star B}$ à partir de f_A et de f_B.
6. On considère enfin l'application $g : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $g(B) = A \star B$, B étant donc un sous-ensemble variable de $\mathbb{R}$, et A étant **fixé** égal à $[0; 2]$. L'application g est-elle injective ? Surjective ? Pour quel ensemble A cette application serait-elle bijective ? Justifier que ce choix est unique.

Exercice 4

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n - v_n + n - 1$ et $v_{n+1} = 2v_n - u_n + n + 3$.

1. Calculer les valeurs de u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3.
2. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de u_n et celle de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
3. Montrer que la suite auxiliaire (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$ est arithmético-géométrique, et déterminer le terme général de cette suite.
4. Déterminer une constante réelle a pour laquelle la suite auxiliaire (z_n) définie par $z_n = u_n + v_n + an^2$ est une suite arithmétique, et déterminer le terme général de cette suite.
5. Déduire des deux questions précédentes les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).
6. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ (on essaiera de simplifier le plus possible le résultat obtenu).
7. Pour cette dernière question, on utilise une autre méthode pour retrouver les termes généraux des deux suites, on ne réutilisera donc pas les résultats des questions précédentes.
   (a) Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n - 2n - 1$.
   (b) Déterminer deux constantes réelles b et c pour lesquelles la suite auxiliaire (t_n) définie par $t_n = u_n + bn^2 + cn$ vérifie la relation de récurrence linéaire double $t_{n+2} = 4t_{n+1} - 3t_n$.
   (c) Calculer le terme général de (t_n) et retrouver ainsi celui de (u_n), puis celui de (v_n).