Révision pour le DS1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 octobre 2011

Exercice 1

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
2. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant \ln 2$, soit $\dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant 2$, donc $\dfrac{-3x+14}{2x-6} \leqslant 0$. Un petit tableau de signe mène alors à $\mathcal{S} = \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right[$.
3. Faisons un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\lvert 4-x\rvert$		$4-x$		$4-x$	0	$x-4$	
$\lvert 2x-1\rvert + \lvert 4-x\rvert$		$5-3x$		$x+3$		$3x-5$	

Sur l'intervalle de droite, on obtient comme solution de l'équation $x = 0$, qui est valable. L'équation centrale donne $x = 2$ qui est aussi valable. Enfin, celle de droite aboutit à $x = \dfrac{10}{3}$, qui elle n'appartient pas au bon intervalle. Finalement, $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.

4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\dfrac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6} \geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2+x-6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$5x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-3; -\dfrac{11}{5}\right] \cup]-1; 2[$.

Exercice 2

1. La fonction est définie lorsque $x^2 - 4 > 0$, donc $\mathcal{D}_h =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = h(x)$, donc la fonction h est paire.
3. La fonction $x \mapsto x^2 - 4$ est, comme la fonction carré, décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Comme ln est strictement croissante sur son ensemble de définition, on en déduit que h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$.
4. Cela revient à dire $\ln(x^2 - 4) = \ln 1$, donc $x^2 - 4 = 1$, soit $x^2 = 5$. L'équation admet donc deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

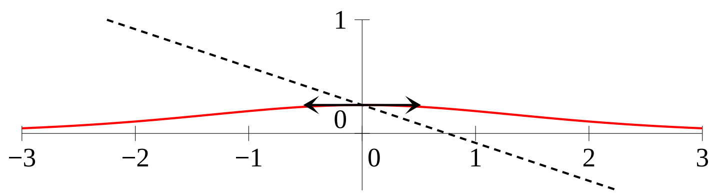
Exercice 3

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.
3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).
4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \dfrac{e^x(1 + e^x) - 2e^{2x}}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1 + 1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f			$\frac{1}{4}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1 + 2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1 - 2)}{(1 + 2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1 - e^x) + (1 + e^x)^3}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1 + e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.

8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :

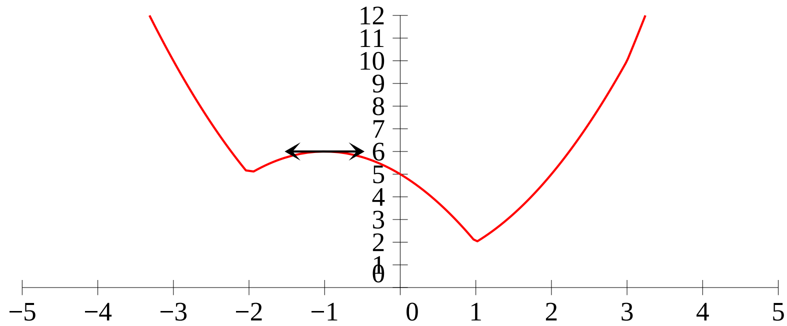


Exercice 4

1. On va avoir besoin de faire un petit tableau : $-x^2-x+2$ a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, admet donc deux racines $x_1 = \frac{1+3}{-2} = -2$ et $x_2\frac{1-3}{-2} = 1$. Le trinome est négatif en-dehors de ses racines.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$\lvert -x^2-x+2 \rvert$		x^2+x-2	0	$-x^2-x+2$	0	x^2+x-2		x^2+x-2	
$\lvert x-3 \rvert$		$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$g(x)$		x^2+1		$-x^2-2x+5$		x^2+1		x^2+2x-5	

2. Il faut étudier séparément chaque expression. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$, donc g est décroissante sur $]-\infty;-2]$ et croissante sur $[1;3]$. La fonction $x \mapsto -x^2-2x+5$ a une dérivée égale à $-2x-2$, qui s'annule pour $x=-1$. Elle est croissante sur $[-2;-1]$ (donc g aussi) et décroissante sur $[-1;1]$ (donc g aussi). La fonction $x \mapsto x^2+2x-5$, qui est l'opposée de la précédante, est croissante sur $[2;+\infty[$, comme le sera g.
3. On peut calculer les images des valeurs intéressantes : $g(-2) = 5$; $g(-1) = 6$; $g(1) = 2$ et $g(3) = 10$. Toutes les portions de courbes sont des morceaux de parabole, on obtient une courbe qui ressemble globalement à ceci :



4. Graphiquement, il semble que la seule valeur pour laquelle la fonction vaut 2 est $x=1$. Par le calcul, on résout $x^2+1=2$, ce qui donne $x=-1$ ou $x=1$. La première solution n'est pas valide, mais $x=1$ si. On résout ensuite $-x^2-2x+5=2$, soit $x^2+2x-3=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+12 = 16$, et admet donc deux racines $x_3 = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $x_4 = \frac{-2-4}{2} = -3$. On retrouve la solution $x=1$, mais la deuxième n'est pas valide. Enfin, il faut résoudre $x^2+2x-5=2$, soit $x^2+2x-7=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+28 = 32$, donc admet deux racines $x_5 = \frac{-2+\sqrt{32}}{2} = -1+2\sqrt{2}$ et $x_6 = \frac{-1-\sqrt{32}}{2} = -1-2\sqrt{2}$. Aucune de ces deux solutions n'est supérieure à 3 (c'est évident pour x_6 qui est négative, quant à x_5, elle est plus petite que $-1+2\times 1,5 = 2$), donc aucune n'est valide. Finalement, nous avons confirmé que la seule solution de l'équation était $x=1$.