Devoir Surveillé n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

6 octobre 2011

Exercice 1

1. Cette inéquation n'a de sens que si $x \geqslant 0$. On peut alors poser $X = \sqrt{x}$ pour obtenir l'inéquation $X^2 - 4X + 3 \geqslant 0$. Le trinôme du membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. Il est donc positif si $X \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$. On en déduit, en ne gardant que les valeurs positives, que $\mathcal{S} = [0; 1] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$.
2. Pas d'autre choix ici que de faire un tableau de signes pour $|x^2 - 1| - |x - 2|$:

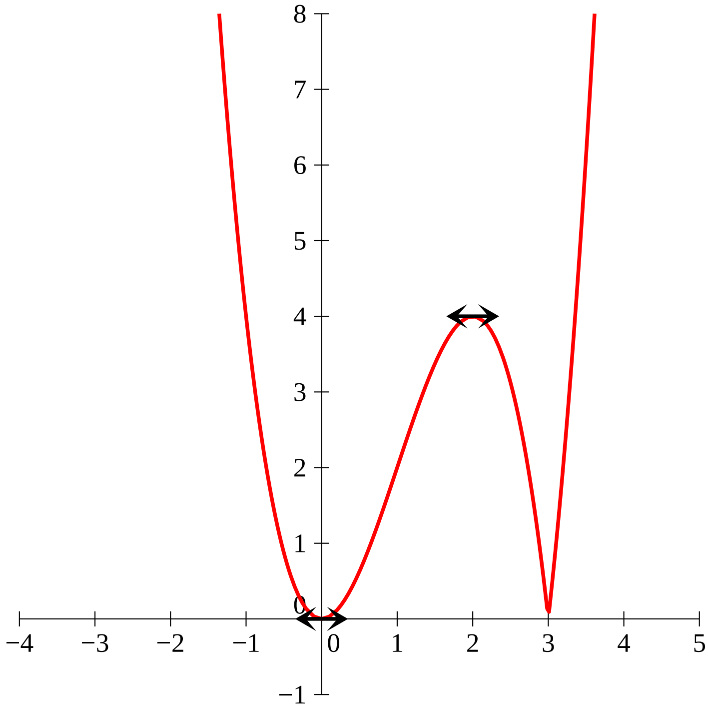
x		-1		1		2	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$		$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert x^2-1\rvert - \lvert x-2\rvert$	x^2+x-3	-3	$-x^2+x-1$	-1	x^2+x-3	3	x^2-x+1

   Reste à résoudre pas moins de quatre équations. Sur $]-\infty; -1]$, $x^2+x-3 = -1 \Rightarrow x^2+x-2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ (pas valable), et $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ (valable). Sur $[-1; 1]$, on obtient $-x^2 + x0 = 0$, soit $x = 0$ (valable) ou $x = 1$ (valable aussi). Sur $[1; 2]$, on a $x^2 + x - 2 = 0$, équation déjà résolue tout à l'heure, qui donne pour racines -2 (non valable sur cet intervalle) et 1 (valable mais déjà obtenue sur l'intervalle précédent). Enfin, sur $[2; +\infty[$, on a $x^2 - x + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif. On déduit de tout cela que $\mathcal{S} = \{-2; 0; 1\}$.
3. Cette équation du troisième degré a pour racine évidente -1 puisque $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$. On peut donc la factoriser sous la forme $(x+1)(ax^2 + bx + c) = 0$. En développant, on a $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, dont on déduit par identification que $a = 2$, $b = -5$ et $c = 2$. Reste à résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-1; \dfrac{1}{2}; 2\right\}$.
4. Commençons par constater que l'inéquation n'a pas de sens si $x^2 + 2x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ ou $x = -2$. Pour toutes les autres valeurs de x, on peut supprimer les ln pour obtenir $|x^2 + 2x| < 3$, c'est-à-dire $-3 < x^2 + 2x < 3$. L'inéquation de gauche revient à dire que $x^2 + 2x + 3 > 0$, ce qui est toujours vrai (le discriminant est négatif), celle de droite donne $x^2 + 2x - 3 < 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. L'inéquation est donc vérifiée si $x \in]-3; 1[$, et concernant l'inéquation initiale, on a $\mathcal{S} =]-3; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 1[$.

1 Exercice 2

Commençons par nous intéresser aux variations et au signe de $g : x \mapsto x^3 - 3x^2$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. De plus, $g(x) = x^2(x-3)$, il n'y a donc qu'à calculer $g(2) = 8 - 12 = -4$ pour pouvoir remplir le beau tableau suivant :

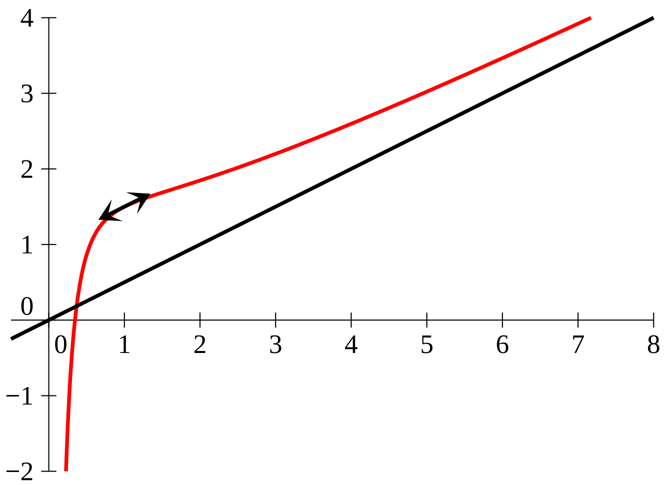
x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 3

1. Ces deux fonctions sont évidemment définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction g a pour dérivée $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$. On en déduit que g est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, admettant un minimum en 1 de valeur $g(1) = 1 - 0 = 1$. La fonction g est donc toujours strictement positive.
3. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^-$, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Pour la limite en $+\infty$, le plus simple est de séparer la deuxième fraction en deux morceaux : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée pour le dernier morceau), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. Comme $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\ln(x)}{x}$, dont on vient de calculer la limite en $+\infty$, tout le travail a déjà été fait.
5. Il faut pour cela étudier le signe de $\frac{1+\ln(x)}{x}$. Le dénominateur étant toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, c'est du signe de $1+\ln(x)$, qui s'annule pour $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. La courbe est donc en-dessous de la droite sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$, et au-dessus sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.
6. Calculons donc $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-(1+\ln(x))}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln(x)}{2x^2}$. Le dénominateur étant évidemment positif, cette dérivée est du signe du numérateur, c'est-à-dire de g, dont on a vu qu'elle était toujours strictement positive. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
7. Cette équation se ramène à $x^2 - 2\ln(x) = x^2$, soit $\ln(x) = 0$. La seule solution en est donc $x = 1$. les points de la courbe où les tangentes sont parallèles à (D) sont ceux où le coefficient directeur de la tangente vaut $\frac{1}{2}$, autrement dit ceux pour lesquels $f'(x) = \frac{1}{2}$. Comme $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, le seul point correspondant est $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.
8. Voici la courbe demandée :



Exercice 4

1. On a donc $f_1(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}$, et $f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} - \sqrt{x+1}e^{-x} = \frac{1-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} = \frac{-1-2x}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}$. Cette dérivée est du signe de $-2x-1$, et s'annule notamment pour $x = -\frac{1}{2}$, valeur pour laquelle la fonction admet un maximum égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$. Par ailleurs, $f_1(-1) = 0$, et par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$. D'où le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f_1	0 ↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘ 0

2. C'est le même calcul que ci-dessus : $f_k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-kx} - k\sqrt{x+1}e^{-kx} = \dfrac{1-2k(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-kx}$. cette dérivée est du signe de $1-2k(x+1)$, équation de droite s'annulant quand $x+1 = \dfrac{1}{2k}$, soit $x = \dfrac{1}{2k} - 1$. La fonction y admet bien un maximum (la dérivée est positive avant et négative après), de valeur $f_k\left(\dfrac{1}{2k}-1\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2k}}e^{-\frac{1}{2}+k} = \dfrac{e^k}{\sqrt{2ke}}$. Lorsque k tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2k} - 1$ a pour limite -1, et la valeur du maximum tend vers $+\infty$ (croissance comparée). Autrement dit, le maximum se situe de plus en plus près de -1, et de plus en plus haut.
3. En -1, le numérateur de la dérivée a pour limite e^k, et le dénominateur tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to-1} f_k'(x) = +\infty$. Les courbes $\mathcal{C}_k$ auront toutes une tangente verticale en -1.
4. Toutes les courbes passent bien sûr par le point $(-1;0)$, mais aussi par le point $(0;1)$. De plus, par croissance comparée, toutes les fonctions ont une limite nulle en $+\infty$, donc toutes les courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale.
5. On a déjà vu à la question précédente qu'on a toujours $f_k(0) = 1$. De plus, $f_k'(0) = \dfrac{1-2k}{2} = \dfrac{1}{2} - k$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = \left(\dfrac{1}{2} - k\right)x + 1$ (la pente de la tangente est de plus en plus négative).
6. $f_{k+1}(x) - f_k(x) = \sqrt{x+1}e^{-(k+1)x} - \sqrt{x+1}e^{-kx} = \sqrt{x+1}e^{-kx}(e^{-x} - 1)$. Cette différence est du signe de $e^{-x} - 1$, qui s'annule en 0, est positive entre -1 et 0 et négative ensuite. La courbe $\mathcal{C}_{k+1}$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_k$ sur $[-1;0]$ et en-dessous sur $[0;+\infty[$.
7. Voici les courbes, $\mathcal{C}_\infty$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert, ainsi que les tangentes en 0 :