Problème de révisions pour le DS10 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

1er juin 2012

1. Cours : $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(Z) = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.

2. (a) Si $i > k$, on aura toujours $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$. Sinon, $\forall k > 1$, $\forall i \in \{1; \dots; k\}$, $P((Z = k) \cap (X = i)) = P(Z = k) \times P_{Z=k}(X = i) = \dfrac{1}{2^k} \times \dfrac{1}{k}$.

   (b) C'est une simple application de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Z = k)$ (la somme débute à $k = i$ puisque la probabilité de l'intersection est nulle si $k < i$).

   (c) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ (ce qui est normal).

3. (a) En effet, $iP(X = i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ (puisque toutes les valeurs que prend l'indice k sont plus grandes que i), soit $iP(X = i) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$. La série de terme général $iP(X = i)$ est à termes positifs et majorée par une série géométrique convergente, elle converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance.

   (b) On a $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{3}{2}$.

4. (a) En reprenant les questions précédentes, $i^2P(X = i) \leqslant \dfrac{i}{2^{i-1}}$, qui est le terme général d'une série géométrique dérivée convergente, donc X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k2^k}$, d'où la formule demandée.

   (b) On a $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$, et $ak(k-1) + bk + c = ak^2 + (b-a)k + c$, par identification on obtient $a = 2$, $b = 5$ et $c = 1$.

   (c) Il s'ensuit que $E(X^2) = \displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(k-1) + 5k + 1}{2^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Via König-Huygens, on a donc $V(X) = \dfrac{19}{6} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{11}{12}$.

5. (a) En effet, $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{k=n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

(b) En intégrant l'équation précédente entre 0 et $\frac{1}{2}$, on obtient $f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_n(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$.

Or, $f_n(0) = 0$, donc $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$. La première intégrale se calcule, elle est égale à $[-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = \ln(2)$, d'où la formule demandée.

(c) La fonction sous l'intégrale étant positive, l'intégrale est bien positive. De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \leqslant \frac{1}{2^n}$, et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - x \leqslant 1$, donc $\frac{1}{1-x} \leqslant 2$, d'où en intégrant tout ça $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2^n}\,dx = \frac{1}{2^n}$. Une application évidente du théorème des gendarmes donne donc $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$.

(d) En passant à la limite dans la formule obtenue à la question 2, on a alors $\sum_{k=1}^{+\infty} = \ln(2)$. Or, cette somme est justement égale à $P(X = 1)$, d'où le résultat final.