Problème de révisions pour le DS10 (année 2011)

ECE3 Lycée Carnot

1er juin 2012

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. On note Z le nombre de lancers ainsi effectués, puis si ce nombre de lancers a été égal à k, on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k, on tire une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée. Dans le cas (extrêmement improbable) où on n'obtient jamais Pile lors de la série de lancers de la pièce, on considère que $X = 0$.

1. Rappeler la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, X) (en précisant clairement les valeurs pour lesquelles $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$).

   (b) En déduire que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

   (c) En admettant la formule $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} a_{i,k}$ (où $a_{i,k}$ est une expression pouvant dépendre des deux indices i et k), calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)$.
3. (a) Montrer que, $\forall i > 1$, $iP(X = i) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, et en déduire que X admet une espérance.

   (b) En utilisant la même formule d'inversion des sommes qu'à la question 2.c), calculer $E(X)$.
4. (a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que X^2 admet une espérance et que $E(X^2) = \displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{2^k}$.

   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k > 1$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

   (c) En déduire la valeur de $E(X^2)$, puis calculer $V(X)$.
5. On note dans cette question $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[$, $f_n'(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

   (b) En déduire que $\forall n > 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

   (c) Montrer que, $\forall n > 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \frac{1}{2^n}$, et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_O^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

   (d) Déduire des calculs précédents que $P(X = 1) = \ln(2)$.