Problème

1. On a sans difficulté $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (les plus rigoureux remarqueront que, si $n = 1$, on tire nécessairement les deux uniques boules présentes dans l'urne dès le premier tirage, donc $X(\Omega) = \{1\}$, et $Y(\Omega) = \{1\}$ également puisque l'urne est alors immédiatement vide). Dans le cas général, il faut au moins n expériences pour vider l'urne puisqu'on retire au maximum deux boules de l'urne à chaque expérience, donc $Y(\Omega) = \{n; n+1; \dots\}$.
2. À la première expérience, on tire simultanément deux boules dans une urne en contenant $2n$, ce qui donne $\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ tirages possibles. Sur ceux-ci, il y en a n pour lesquels on a deux fois le même numéro (soit on tire les deux boules numérotées 1, soit les deux numérotées 2, etc), ce qui donne bien $P(A) = \frac{1}{2n-1}$.
3. Tant que la première paire n'est pas obtenue, on aura toujours $2n$ boules dans l'urne, et la probabilité d'obtenir une paire reste inchangée. La variable X mesure donc le temps d'attente d'un événement qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2n-1}$, et $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$. En particulier, $E(X) = 2n-1$, et comme $1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$, $V(X) = \frac{2n-2}{2n-1} \times (2n-1)^2 = (2n-1)(2n-2)$.
4. (a) S'il y a au départ quatre boules dans l'urne, il n'en restera plus que deux une fois que le premier tirage faisant apparaitre une paire sera effectué, et on tirera nécessairement la deuxième paire au tirage suivant. Autrement dit, on aura toujours $Y = X + 1$.

   (b) Comme on sait que dans ce cas particulier $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$, on peut en déduire que $P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$. Inutile de faire des calculs supplémentaires pour l'espérance et la variance, il faut utiliser les propriétés du cours : $E(Y) = E(X + 1) = E(X) + 1$ par linéarité, avec $E(X) = 3$ lorsque $n = 2$, donc $E(Y) = 4$. Encore mieux, $V(Y) = V(X)$ (c'est un cas particulier de la formule $V(aX+b)$, soit $V(Y) = 3 \times 2 = 6$.
5. (a) Pour avoir $Y = 3$, il faut tirer une paire à chaque expérience. Cela se produit avec probabilité $\frac{1}{5}$ à la première expérience (quand il y a 6 boules dans l'urne), puis avec probabilité $\frac{1}{3}$ lors de la deuxième expérience (plus que quatre boules dans l'urne), et avec probabilité 1 lors de la troisième expérience (plus que deux boules dans l'urne), soit $P(Y = 3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.
   Pour $Y = 4$, le plus simple est de distinguer deux cas : soit on ne tire pas de paire à la première expérience (probabilité $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$), puis on tire les trois paires lors des trois tirages suivantes (probabilité $\frac{1}{15}$ au vu de ce qui précède) ; soit on tire une première paire à la première expérience (probabilité $\frac{1}{5}$), et il faut alors ne pas en tirer lors de la deuxième (sinon, il ne resterait plus que deux boules et on serait certain de vider l'urne dès la troisième expérience), ce qui a une probabilité $\frac{2}{3}$ de se produire (plus que quatre boules dans l'urne), et on tire ensuite deux paires lors des troisième et quatrième expérience (probabilités $\frac{1}{3}$ puis 1). Les deux cas étant disjoints, on a au total $P(Y = 4) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{75} + \frac{2}{45} = \frac{22}{225}$.

   (b) Le raisonnement est en fait similaire à celui du calcul de $P(Y = 4)$. Pour avoir $Y = k+1$, deux possibilités : soit on commence par ne pas tirer une paire lors de la première expérience (probabilité $\frac{4}{5}$), et il faut donc tirer toutes les paires lors des k expériences suivantes, ce qui se produit avec probabilité $P(Y = k)$, puisque la situation à l'issue de cette première expérience est identique à la situation initiale ; soit on tire une paire immédiatement (probabilité $\frac{1}{5}$), et il faut alors tirer toutes les paires restantes en k expériences, mais dans une urne qui ne contient plus que quatre boules. Or, on a vu à la question 4 que la probabilité de tirer toutes les paires en k expériences dans une urne à quatre boules valait $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$. La formule demandée en découle.

(c) Commençons par initialiser : pour $k = 3$, $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{12 - 10}{15} = \frac{1}{15} = P(Y = 3)$. Supposons désormais la formule vérifiée au rang k, on a alors au vu de la relation démontrée à la question précédente $P(Y = k + 1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right) + \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \frac{5}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$, ce qui la formule cherchée au rang $k + 1$. On conclut d'après le principe de récurrence.

(d) Sous réserve de convergence, $E(Y - 1) = \sum_{k=3}^{+\infty}(k - 1) \times \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. On reconnait des séries géométriques dérivées convergentes auxquelles il manque uniquement le premier terme, et $E(Y-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1 - \frac{4}{5})^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times 24 - \frac{1}{2} \times 8 = 8$. On a donc $E(Y) = 8 + 1 = 9$.

(e) C'est le même calcul qu'au-dessus avec des séries dérivées secondes (même pas besoin de changement d'indice). Sous réserve de convergence, $E(Y(Y-1)) = \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{2}k(k-1)\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1 - \frac{4}{5})^3} - 2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1 - \frac{2}{3})^3} - 2\right) = 124 - 26 = 98$. On en déduit, via la formule de König-Huygens, que $V(Y) = E(Y(Y - 1)) + E(Y) - E(Y)^2 = 98 + 9 - 81 = 26$.

6. (a) Il faut tirer les n paires successivement, sachant qu'il y aura deux boules de moins à chaque tirage. Par un calcul très similaire à celui de $P(Y = 3)$ à la question 5.a), on aura $P(Y = n) = \frac{1}{2n - 1} \times \frac{1}{2n - 3} \times \cdots \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{(2n) \times (2n - 2) \times \ldots 2}{(2n) \times (2n - 1) \times (2n - 2) \ldots 3 \times 2 \times 1} = \frac{2 \times n \times 2 \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n)!} = \frac{2^n \times n!}{(2n)!}$.

(b) On peut raisonner de la façon suivante : il faut attendre en moyenne $2n - 1$ expériences avant de tirer la première paire (c'est l'espérance de X calculée plus haut). Ensuite, comme il ne reste plus que $2n-2$ boules dans l'urne, il faut attendre en moyenne $2n-3$ expériences avant d'obtenir une deuxième paire. Et ainsi de suite jusqu'à attendre en moyenne trois expériences pour l'avant-dernière paire, et une pour la dernière. Au total, le nombre moyen d'expériences vaut donc $(2n - 1) + (2n - 3) + \cdots + 3 + 1$.

(c) On a donc $E(Y) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n \times (n + 1) - n = n^2$.