Devoir Surveillé n°1

ECE3 Lycée Carnot

6 octobre 2011

Durée : 2H. Calculatrices interdites

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x - 4\sqrt{x} \geqslant -3$
2. $|x^2 - 1| = |x - 2| - 1$
3. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
4. $\ln(|x^2 + 2x|) < \ln(3)$

1 Exercice 2

Étudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto |x^3 - 3x^2|$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par les équations $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$ et $g(x) = x^2 - 2\ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et de g.
2. Étudier les variations de la fonction g, en déduire le signe de g.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est aymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (on rappelle qu'il suffit pour cela de prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0$).
5. Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe de f.
6. Étudier les variations de la fonction f (on pourra réutiliser les résultats de la question 2).
7. Résoudre l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire les points de la courbe où les tangentes sont parallèles à (D).
8. Tracer dans un même repère ces tangentes, la droite (D) et une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 4

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit sur $[-1;+\infty[$ la fonction f_k par $f_k(x) = \sqrt{x+1}e^{-kx}$, et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

1. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f_1.
2. Montrer que $f_k'(x) = \dfrac{1-2k(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-kx}$. En déduire que la fonction f_k admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque k tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} f_k'(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_k$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_k$ et de $\mathcal{C}_{k+1}$.
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.