Devoir Maison n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

2 mai 2012

Exercice 1 (Ecricome 2005)

1. La fonction est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et de plus $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. Ceci prouve la continuité du prolongement effectué en posant $f(0) = -1$, donc la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$. Cette dérivée ayant une limite infinie en 0, le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet d'affirmer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe y admettra une tangente verticale.
3. Dérivons donc une deuxième fois sur $\mathbb{R}_+^*$: $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$. La courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion en $x = \dfrac{1}{2}$, elle est concave sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$ et convexe sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. La dérivée f' est donc décroissante puis croissante, et admet en $\dfrac{1}{2}$ un minimum valant $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2 > 0$. On en déduit que f' est toujours positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par croissance comparée, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Au vu du calcul précédent, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, et la courbe de f admet donc une branche parabolique de direction (Oy).
5. La fonction étant continue et strictement croissante, elle est certainement bijective, et au vu des limites calculées, $J =]-1; +\infty[$.
6. D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est bijective strictement croissante de $]-1; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
7. L'existence de x_k est une conséquence de la bijectivité de f et du fait que bient entendu $k \geqslant -1$.
   (a) Il suffir de savoir lire le tableau donné dans l'énoncé pour constater que $x_0 = 1$.
   (b) De même, le tableau de valeurs et la croissance de f permettent de dire que $1,5 \leqslant x_1 \leqslant 2$ et $2 \leqslant x_2 \leqslant 2,5$.
   (c) D'après la définition de x_k, on a $x_k = f^{-1}(k)$, donc, au vu de la limite donnée à la question 6, $\underset{k\to+\infty}{x}{}_k = +\infty$.
8. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-2}{x^2}$. La fonction φ est donc décroissante sur $]0; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$. Si on tient à être complet, on peut ajouter que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$ (pour cette dernière limite, il faut un argument de croissance comparée).
   (b) Comme $1,69 \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$, $1,73 \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$, et la fonction est croissante entre ces deux bornes, le résultat est évident.

(c) Dérivons donc à nouveau sur $\mathbb{R}_+^*$: $\varphi''(x) = \dfrac{x^2 + 2x(x-2)}{x^4} = \dfrac{3x-4}{x^3}$. La fonction φ' est donc croissante (et négative au vu des variations de φ) sur $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$. Comme $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = -\dfrac{2}{9}$, on a donc $-\dfrac{2}{9} \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$, et en particulier $|\varphi'(x) = \dfrac{2}{9}|$.

(d) En effet, si $f(x) = 1$, alors $x^2 - x\ln(x) = 2$, et on peut diviser par x (quiç ne peut de toute façon pas être nul) pour obtenir $x = \ln(x) + \dfrac{2}{x}$, soit $\varphi(x) = x$. Comme on a vu plus haut que x_1 était l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$, il s'agit donc également de l'unique point fixe de la fonction φ.

(e)
- C'est une récurrence utilisant le résultat du b : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ appartient sûrement à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$, et en supposant que $u_n \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, on aura, au vu du b, $f(u_n) \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, ce qui achève la récurrence.
- On a tous les éléments pour appliquer l'IAF à la fonction φ entre x_1 et u_n : la valeur absolue de φ' est majorée par $\dfrac{2}{9}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$, on vient de prouver que u_n appartenait à l'intervalle, et on a vu à la question $7.b$ que c'était aussi le cas de x_1. On en déduit que $|f(u_n) - f(x_1)| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$, c'est-à-dire, puisque $f(x_1) = x_1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$.
- Une dernière récurrence pour la route. Au rang 0, comme $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, on a certainement $|u_0 - x_1| \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc a fortiori $|u_0 - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^0$. Si on suppose désormais l'inégalité vérifiée au rang n, alors $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$ (question précédente) et $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ (hypothèse de récurrence) donc $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^n = \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}$.

(f) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{9}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_1$.

Exercice 2 (Ecricome 2011)

Partie I. Un jeu en ligne.

1. Il y a neuf cases, trois jetons à placer dans des cases distinctes, avec un ordre qui n'est pas important, donc le nombre de possibilités est $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{6! \times 3!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 4 \times 4 \times 7 = 84$.
2. Sur les 84 placements possibles au total, il y en a trois pour lesquels les jetons sont alignés horizontalement, trois pour lesquels ils sont alignés verticalement et deux pour lesquels ils sont alignés en diagonale, donc $P(H) = P(V) = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$, et $P(D) = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.
3. Les événements N, V, H et D forment un système complet d'événements, donc $P(N) = 1 - P(H) - P(V) - P(D) = 1 - \dfrac{8}{84} = 1 - \dfrac{2}{21} = \dfrac{19}{21}$.
4. (a) Au vu des données de l'énoncé et des calculs précédents, $Z_i(\Omega) = \{-2; 18\}$, et $P(Z_i = -2) = \dfrac{19}{21}$; $P(Z_i = 18) = \dfrac{2}{21}$. On en déduit que $E(Z_i) = -2 \times \dfrac{19}{21} + 18 \times \dfrac{2}{21} = -\dfrac{2}{21}$.

(b) Si on note Z le gain journalier, on a manifestement $Z = -\sum_{i=1}^{i=10\ 000} Z_i$, donc par linéarité de l'espérance, $E(Z) = -10\ 000 \times E(Z_i) = \dfrac{20\ 000}{21}$.

Partie II. Cas de joueurs invétérés.

1. (a) On a vu plus haut que chaque partie avait une probabilité $\dfrac{2}{21}$ d'être gagnée. Puisqu'on répète 100 expériences indépendantes, on est dans un schéma de loi binomiale. Plus précisément, $X \sim \mathcal{B}\left(100; \dfrac{2}{21}\right)$.

   (b) Cela découle de la question précédente : $E(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{200}{21}$, et $V(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} \times \dfrac{19}{21} = \dfrac{3\ 800}{441}$.

   (c) Le perd 2 euros pour chaque partie perdue, et en perd -18 (puisqu'il en gagne 18) quand il gagne. Puisqu'il y a X parties gagnées, et donc $100 - X$ parties perdues, $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$.

2. La probabilité de perdre les k premières parties (avec $k \geqslant 1$) est de $\left(\dfrac{19}{21}\right)^k$ (les parties sont indépendantes) donc celle de gagner au moins une partie sur les k premières vaut $1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^k$. On cherche donc à résoudre l'inéquation $1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^k \geqslant \dfrac{1}{2}$, soit $\left(\dfrac{19}{21}\right)^k \leqslant \dfrac{1}{2}$. On peut prendre les ln pour obtenir la condition $k \ln \dfrac{19}{21} \leqslant -\ln(2)$, soit encore, puisque $\ln \dfrac{19}{21} < 0$, $k \geqslant -\dfrac{\ln 2}{\ln \frac{19}{21}} \simeq -\dfrac{0,7}{0,1} \simeq 7$. Il faudra donc environ 7 parties pour avoir plus d'une chance sur deux d'en gagner au moins une.

3. Jouer au plus k parties avant d'en gagner une est exactement équivalent à gagner au moins une partie lors des k premières, le calcul de cette probabilité a donc déjà été effectué.

Partie III. Contrôle de la qualité du jeu.

1. Une fois qu'on suppose qu'un des trois jetons se situe en haut à gauche, il reste $\dbinom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ façons de placer les deux autres. Parmi ces 28 positions, une seule permet d'aligner les trois étoiles horizontalement, une autre verticalement, et une dernière horizontalement. Ce qui donne $P_\Delta(H) = P_\Delta(V) = P_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}$.

2. En faisant ce qui nous est demandé, on obtient $P(N) = P(\Delta) \times P_\Delta(N) + P(\overline{\Delta}) \times P_{\overline{\Delta}}(N)$. Or, $P(\Delta) = x$ d'après l'énoncé, donc $P(\overline{\Delta}) = 1 - x$, et $P_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$ (c'est la situation étudiée dans la première partie), et enfin $P_\Delta(N) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$ d'après les calculs de la question précédente. On obtient finalement $P(N) = x \times \dfrac{25}{28} + (1 - x) \times \dfrac{19}{21} = \dfrac{75x}{84} + \dfrac{19}{21} - \dfrac{76x}{84} = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.

3. Comme dans la première partie, la variable G prend les valeurs 2 et -18 avec probabilité respective $P(N)$ et $1 - P(N)$, donc $E(G) = 2P(N) - 18(1 - P(N)) = 20P(N) - 18 = -\dfrac{20x}{84} + 20 \times \dfrac{19}{21} - 18 = -\dfrac{5x}{21} + \dfrac{20 \times 19 - 18 \times 21}{21} = \dfrac{2 - 5x}{21}$ (pour ceux que ça rebute de calculer $20 \times 19 - 18 \times 21$, on peut noter que c'est de la forme $x(x-1) - (x-2)(x+1) = x^x - x - (x^2 - x - 2) = 2$). L'espérance de gain reste donc positive tant que $x < \dfrac{2}{5}$.

4. On cherche à calculer $P_{\overline{N}}(\Delta)$, c'est une application classique de la formule de Bayes : $P_{\overline{N}}(\Delta) = \dfrac{P(\Delta) \times P_\Delta(\overline{N})}{P(\overline{N})} = \dfrac{x \times \frac{3}{28}}{1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}} = \dfrac{9x}{84 + x - 76} = \dfrac{9x}{x+8}$.