Devoir Maison n°5

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 2 mai 2012

Exercice 1 (Ecricome 2005)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$, et prolongée par $f(0) = -1$. On donne le tableau de valeurs suivant pour f :

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

On définit aussi la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$
   (a) Donner la valeur de x_0.
   (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
8. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique point fixe de la fonction φ.
   (e) Montrer successivement que pour tout entier n :
   - $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$
   - $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$
   - $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 (Ecricome 2011)

Partie I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons ($\bigstar$) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	$\bigstar$		
2	$\bigstar$		
3		$\bigstar$	

On définit les événements H, V, D, et N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H, V, et D.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à $\dfrac{19}{21} \simeq 0.9048$.
4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i.
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

Partie II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\dfrac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule $p_k = 1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^k$.

Partie III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0; 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P_\Delta(H)$, $P_\Delta(V)$, et $P_\Delta(D)$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(\Delta, \overline{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés vaut $P(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?