DM4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2012

Exercice 1

1. On calcule (a priori sans difficulté) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Les -2 en-dehors de la diagonale forcent à prendre $\alpha = 2$. Comme $2A$ est une matrice ayant une diagonale de 4, il faut alors prendre $\beta = 3$ pour que les élémentes de la diagonale de $\alpha A + \beta I$ soient égaux à 7. On vérifie qu'en effet $A^2 = 2A + 3I$.
3. On peut recopier à peu de chose près la récurrence de l'exemple numéro je ne sais plus combien du cours. Notons donc P_n : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. La propriété P_0 est vraie, en posant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$. Même si ça ne sert à rien pour la récurrence, notons que P_1 est aussi vraie en prenant $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n. On peut alors écrire $A^{n+1} = A \times A^n = A(\alpha_n A + \beta_n I) = \alpha_n A^2 + \beta_n A$. Ne reste plus qu'à utiliser la relation de la question précédente : $A^{n+1} = \alpha_n(2A + 3I) + \beta_n A = (2\alpha_n + \beta_n)A + 3\alpha_n I$. La propriété P_{n+1} est con vérifiée, avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$.
4. En effet, d'après les relations précédentes, $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$. On reconnait bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4+12 = 16$, et qui admet deux racines $r = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $s = \dfrac{2-4}{2} = -1$. Il existe donc deux réels a et b tels que $\alpha_n = a3^n + b(-1)^n$. À l'aide des deux premiers termes de la suite, on a $\alpha_0 = 0 = a + b$ et $\alpha_1 = 1 = 3a - b$, donc $b = -a$ et $4a = 1$, soit $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. Finalement, $\alpha_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$.
5. Comme $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$, on aura, pour $n \geqslant 1$, $\beta_n = 3\alpha_{n-1} = \dfrac{3^n + 3(-1)^n}{4}$. On constate que cette formule reste vraie pour $n = 0$, elle est donc valable pour tout entier n. Finalement, on obtient $A^n = \dfrac{3^n(A + I) + (-1)^n(3I - A)}{4}$ (on peut donner les coefficients si on le souhaite...).
6. On calcule sans difficulté $B^2 = -4B$ (matrice ne contenant que des coefficients égaux à -4), puis $B^3 = 16B$, et cela devrait suffire à conjecturer que $B^n = (-4)^{n-1}B$. Notons donc P_n cette proposition. La propriété P_1 est vraie (ça ne marche évidemment pas pour B^0) puisque $(-4)^0 B = B$. En supposant P_n vrai, on a alors $B^{n+1} = B \times B^n = B \times (-4)^{n-1}B = (-4)^{n-1}B^2 = (-4)^{n-1} \times (-4B) = (-4)^n B$, ce qui prouve P_n et achève la récurrence.
7. On peut remarquer que $A = B + 3I$, les matrices B et $3I$ commutant, on peut en effet applquer votre formule préférée (ne niez pas, je sais que vous adorez tous ce cher Newton) : $A^n = (B+3I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k (3I)^{n-k}$. On isolera le terme numéro 0, pour lequel $B^k = I$, pour les autres on utilise la formule de la question précédente.

$A^n = 3^nI + \sum_{k=1}^{k=n}(-4)^{k-1}B3^{n-k}I = 3^nI + (\sum_{k=1}^{k=n}(-4)^{k-1}3^{n-k})B = 3^nI - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{k=n}(-4)^k 3^{n-k})B =$ $3^nI - \frac{1}{4}((\sum_{k=0}^{k=n}(-4)^k3^{n-k})B - 3^nB) = 3^nI + \frac{3^n}{4}B - \frac{(-1)^n}{4}B.$

Comme $B = A - 3I$, on peut réécrire ce résultat sous la forme $A^n = 3^nI + \frac{3^n}{4}A - \frac{3^{n+1}}{4}I - \frac{(-1)^n}{4}A + \frac{3(-1)^n}{4}I = \frac{3^n(4I + A - 3I) + (-1)^n(-A + 3I)}{4} = \frac{3^n(A + I) + (-1)^n(3I - A)}{4}$. On retrouve la même formule que précédemment (encore heureux).

Exercice 2

1. En utilisant les notations introduites dans la question 3 de l'énoncé, on a ici $P(M_1) = P(M_2) = p$, et le comportement des deux moteurs étant indépendant, $P(M_1 \cap M_2) = p \times p = p^2$. On en déduit que $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) = 2p - p^2 = p(2 - p)$.
2. Puisque l'avion à deux moteurs s'écrase dès qu'au moins l'un des deux moteurs tombe en panne, $P(A) = P(\overline{M_1 \cup M_2}) = 1 - p(2 - p)$.
3. L'avion s'écrase dès qu'au moins deux des moteurs tombent en panne, soit $B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_4) \cup (M_2 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_4) \cup (M_3 \cap M_4)$.
4. On peut bien sûr appliquer la formule de Poincaré à l'union précédente, mais comme elle est composée de six événements, ça risque d'être très lourd (en fait, beaucoup d'intersections sont vides, ce qui rend le calcul possible). Essayons une autre approche, en notant B_2 l'événement « Deux moteurs **exactement** parmi les quatre tombent en panne pendant le vol » ; et similairement pour B_3 et B_4. On a alors assez clairement $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$ (union disjointe puisqu'on a précisé exactement le nombre de moteurs tombant en panne). Or, $P(B_4) = p^4$ (chaque moteur tombe en panne, indépendamment les uns des autres), $P(B_3) = 4p^3(1 - p)$ (en effet, on a par exemple $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4}) = p \times p \times p \times (1 - p) = p^3(1 - p)$, et il faut encore choisir quel moteur parmi les quatre va survivre). Enfin, pour deux moteurs exactement, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux moteurs qui vont tomber en panne, donc $P(B_2) = 6p^2(-1 - p)^2$. Finalement, $P(B) = p^4 + 4p^3(1 - p) + 6p^2(1 - p)^2$.
5. Calculons donc $P(A) - P(\overline{B}) = 1 - 2p(1 - p) - 1 + p^4 + 4p^3(1 - p) + 6p^2(1 - p) = 2p + p^2 + p^4 + 4p^3 - 4p^4 + 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 = p(2 + 7p - 8p^2 + 3p^3)$. La parenthèse a pour racine évidente $p = 1$, on peut donc factoriser $2 + 7p - 8p^2 + 3p^3 = (p - 1)(ap^2 + bp + c) = ap^3 + (b - a)p^2 + (c - b)p + c$, dont on déduit $a = 3$, $b - a = -8$ et $c - b = 7$, donc $b = -5$ et $c = 2$. On obtient $P(A) - P(\overline{B}) = p(p - 1)(3p^2 - 5p + 2)$. La dernière parenthèse a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \frac{5 + 1}{6} = 1$ et $p_2 = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$. Conclusion de ce passionnant calcul : $P(A) - P(\overline{B}) = 3p(p - 1)^2\left(p - \frac{2}{3}\right)$. On peut alors faire le tableau de signes suivant :

p		0		$\frac{2}{3}$		1	
$(1 - p)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$p - \frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(A) - P(\overline{B})$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

6. On constate que, pour les valeurs 0 et 1, $P(A) = P(\overline{B})$, ce qui signifie que les deux moteurs ont la même probabilité de s'écraser en vol. C'est logique puisque, lorsque $p = 0$, les moteurs ne tombent jamais en panne (peu importe combien il y en a, on arrivera toujours à bon port) ; et au contraire lorsque $p = 1$, tous les moteurs tomberont systématiquement en panne, et l'avion, à deux moteurs comme à quatre, coulera.

7. Au vu du tableau de signe précédent, lorsque $p \leqslant \frac{2}{3}$, $P(A) < P(\overline{B})$, donc l'avion à deux moteurs est moins fiable que l'avion à quatre moteurs, il est préférable d'opter pour le quadrimoteur. Par contre, si $p \geqslant 23$, et en supposant qu'on tienne encore à effectuer le voyage, il vaudra mieux prendre l'avion à deux moteurs (dans ce cas, on aura moins d'une chance sur neuf d'arriver vivant).
8. Notons C l'événement « L'avion à six moteurs s'écrase comme une merde au beau milieu de l'atlantique ». On peut calculer $P(C)$ de la même façon qu'on a calculé $P(B)$: on a au choix exactement trois, quatre, cinq ou six moteurs qui vont tomber en panne, et qu'il faut choisir parmi les six moteurs de l'avion. On obtient alors $P(C) = \binom{6}{3} \times p^3 \times (1-p)^3 + \binom{6}{4} \times p^4 \times (1-p)^2 + \binom{6}{5} \times p^5 \times (1-p) + p^6 = 20p^3(1-3p+3p^2-p^3) + 15p^4(1-2p+p^2) + 6p^5(1-p) + p^6 = 20p^3 - 60p^4 + 60p^5 - 20p^6 + 15p^4 - 30p^5 + 15p^6 + 6p^5 - 6p^6 + p^6 = 20p^3 - 45p^4 + 36p^5 - 10p^6$.
   On peut enchaîner sur le calcul de $P(B) - P(C) = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4 - 20p^3 + 45p^4 - 36p^5 + 10p^6 = p^2(6 - 28p + 48p^2 - 36p^3 + 10p^4)$. Factoriser le polynôme de degré 4 de la parenthèse ne donne pas très envie, mais on sait déjà que 1 doit en être une racine évidente (l'argument probabiliste de la question 6 tient toujours). En effet c'est le cas, donc $10p^4 - 36p^3 + 48p^2 - 28p + 6 = (p-1)(ap^3 + bp^2 + cp + d) = ap^4 + (b-a)p^3 + (c-b)p^2 + (d-c)p + d$. On a donc $a = 10$, puis $b - a = -36$, donc $b = -26$; $c - b = 48$ soit $c = 22$; et enfin $d - c = -28$ donc $d = -6$, soit $P(B) - P(C) = p^2(p-1)(10p^3 - 26p^2 + 22p - 6)$. Encore un polynôme de degré 3 dans la parenthèse, c'est ballot. Mais gros coup de pot, 1 est encore racine évidente ! On retourne factoriser dans la joie et la bonne humeur : $10p^3 - 26p^2 + 22p - 6 = (p-1)(ep^2 + fp + g) = ep^3 + (f-e)p^2 + (g-f)p - g$, dont on déduit $e = 10$, $f - e = -26$ donc $f = -16$ et $g - f = 22$ donc $g = 6$. On progresse : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^2(10p - 16p + 6)$. Les plus observateurs remarqueront que 1 est encore et toujours racine évidente (jamais deux sans trois) mais on peut plus prosaïquement calculer son petit discriminant $\Delta = 256 - 240 = 16$ (oui, on pouvait aussi tout factoriser par 2 avant le calcul, je sais ; ou même utilsier le petit truc du discriminant réduit que je vous ai présenté aux alentours du 15 septembre et que vous avez donc tous sereinement oublié depuis). Bref, il y a deux racines $p_1 = \frac{16+4}{20} = 1$ (je vous l'avais dit !) et $p_2 = \frac{16-4}{20} = \frac{3}{5}$. On est arrivés : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^3\left(p - \frac{3}{5}\right)$.
   Un tableau de signe très très similaire à celui fait un peu plus haut (les paresseux ne feront même pas de tableau de signe en isolant les facteurs positifs p^2 et $(p-1)^2$, gardant le signe du trinome qu'on vient d'étudier) montrer que, si $p \leqslant \frac{3}{5}$, $P(B) \geqslant P(C)$, ce qui prouve que l'avion à six moteurs est le meilleur (on avait déjà vu que le quatre moteurs battait le deux moteurs dans cette zone). Pour $p \geqslant 35$, le quatre moteurs est mieux. Autrement dit, jusqu'à $p = \frac{3}{5}$, il faut six moteurs ; entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$, quatre c'est mieux ; et au-delà de $\frac{2}{3}$, il faut se résoudre à placer nos maigres espoirs de survie dans l'avion à deux moteurs. On peut conjecturer que, si on s'amusait à continuer les calculs avec des avions avec huit, dix moteurs etc., on obtiendrait des zones de plus en plus proches de $p = 0$ dans lesquelles ces nouveaux avions seraient meilleurs que les précédents. Allez, on fait le calcul avec huit moteurs pour voir ! Non, vous ne voulez pas ? Vraiment ? Et si on ajoute un nombre de pilotes égal au nombre de moteurs, chacun étant bourré au point d'avoir une probabilité q de faire crasher l'avion ? Non plus ? Pfff, ces jeunes, ils ne savent plus s'amuser...

Exercice 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Son signe est le même que celui de x, donc négatif sur $\mathbb{R}^-$ et positif sur $\mathbb{R}^+$. D'ailleurs, on remarque aisément que la fonction f est impaire, ce qui évitera aux plus paresseux la moitié des calculs. Pour les variations, $f'(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - x \times \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$ et sur $]0; \sqrt{2}[$. Elle admet un maximum local en $-\sqrt{2}$, de valeur $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2e}$; et un minimum local en $\sqrt{2}$ de valeur $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2e}$.

Quand x tend vers 0, $\frac{1}{x^2}$ tend toujours vers $+\infty$, donc l'exponentielle tend vers $+\infty$. On a une belle forme indéterminée, qui se résout à coups de croissance comparée. Pour faire les choses rigoureusement, on pose $X = \frac{1}{x^2}$ et on a alors $f(x) = \frac{e^X}{\sqrt{X}}$, et l'exponentielle l'emporte. On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ (à cause du signe de x), d'où l'existence d'uns asymptote verticale.

En $+\infty$ comme en $-\infty$, $e^{\frac{1}{x^2}}$ tend vers 1, donc les limites de f sont infinies, mais $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$. Calculons donc $f(x) - x = x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers un infini, on peut utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ pour obtenir $f(x) - x \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$. Cet équivalent ayant pour limite 0, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$. La position relative est donnée par le signe de $x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\frac{1}{x^2} > 0$, la parenthèse est positive, donc $f(x) - x$ est du signe de x. Autrement dit, la courbe est en-dessous de l'asymptote sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus sur $]0; +\infty[$.