

Devoir Maison n°4

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 9 mars 2012

Exercice 1

On considère dans tout ce problème la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On notera I la

matrice identité d'ordre 4.

1. Calculer A^2 .
2. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. Donner par la même occasion des formules de récurrence exprimant α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n .
4. Montrer que la suite (α_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, calculer α_n .
5. En déduire β_n puis l'expression de A^n .
6. On note B la matrice appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1 . Après avoir calculé B^2 et B^3 , conjecturer puis prouver l'expression de B^n .
7. Retrouver l'expression de A^n à l'aide des résultats de la question précédente et de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Un élève de prépa ayant décidé de vraiment s'aérer l'esprit pendant les vacances s'est programmé une semaine de farniente aux îles Pascal, au coeur de l'océan des Mathématiques. Cette destination peu prisée des touristes n'est desservie que par une unique compagnie aérienne, dont la fiabilité laisse malheureusement quelque peu à désirer. Sur les avions de cette compagnie, chaque moteur a une probabilité p (inconnue) de tomber en panne pendant le vol (les différents moteurs ont un comportement indépendant les uns des autres). Tout avion est amené à s'écraser si (au moins) la moitié de ses moteurs tombe en panne pendant le vol.

1. On s'intéresse pour l'instant au cas d'un avion à deux moteurs. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ses deux moteurs tombe en panne vaut $p(2 - p)$.
2. En déduire la probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à bon port (on notera A cet événement).
3. On considère désormais un avion à quatre moteurs. En notant M_1 l'événement « Le moteur n°1 tombe en panne » et similairement pour les trois autres moteurs, décrire l'événement B : « L'avion va s'écraser durant le vol » à l'aide des événements M_i .
4. En déduire $P(B)$ (attention à ne pas compter plusieurs fois certains cas).
5. Factoriser $P(A) - P(\overline{B})$, et déterminer son signe en fonction de p .
6. Qu'obtient-t-on lorsque $p = 0$ ou $p = 1$? Expliquer ce résultat d'un point de vue probabiliste.

7. Si notre préparateur a le choix entre un avion à deux moteurs et un avion à quatre moteurs, lequel lui conseillez-vous (on pourra distinguer des cas selon la valeur de p) ?
8. Notre préparateur ayant finalement renoncé à risquer sa vie pour partir à la plage, il se demande ce que donnerait la comparaison de l'avion à quatre moteurs avec un troisième avion à six moteurs. Pouvez-vous l'aider (il faut vraiment que vous ayez vous-même du temps à perdre) ?

Exercice 3

Étudier le plus complètement possible (variations, limites, asymptotes, signe, position par rapport aux asymptotes) la fonction $f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x^2}}$.