Devoir Maison n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

9 décembre 2011

Exercice

Puisqu'on peut colorier chacune des neuf cases de trois couleurs différentes, que l'ordre est évidemment important et les répétitions possibles, le nombre total de coloriages possibles est le nombre de 9-listes dans un ensemble à trois éléments, soit $3^9 = 19\ 683$.

1. Dans ce cas, il ne reste plus que huit cases à colorier, toujours avec trois couleurs diposnibles à chaque fois, soit $3^8 = 6\ 561$ coloriages possibles.
2. Au lieu de choisir une couleur pour chaque case, il faut en choisir une pour chaque ligne. Comme il y a trois lignes, cela laisse $3^3 = 27$ choix possibles.
3. Regardons ce qui se passe sur la première ligne : on doit avoir une case rouge, une bleue et une verte, mais on a le choix de l'ordre des couleurs, ce qui laisse 3! possibilités. Même chose pour chacune des deux autres lignes. Il y a donc au total $(3!)^3 = 216$ coloriages possibles.
4. Dans ce cas, on peut colorier chacune des neuf cases de deux façons, ce qui fait $2^9 = 512$ possibilités.
5. Ici, il faut choisir quelles sont les deux cases vertes parmi les neuf cases de la grille, puis quelles sont les quatre cases rouges parmi les sept cases restantes, et on n'aura plus le choix pour les trois cases bleues. Si on fait les choix dans un autre ordre, on obtiendra bien sûr le même total, à savoir $\binom{9}{2} \times \binom{7}{4} = 1\ 260$ coloriages.
6. Trois possibilités pour la couleur commune des quatre coins, puis trois couleurs possibles pour chacune des cinq cases restantes, soit un total de $3^6 = 729$ coloriages possibles.
7. Soit toutes les cases sont bleues (une seule possibilité) ; soit huit cases sont bleues, et il faut alors choisir quelle est la case d'une autre couleur (neuf possibilités), puis choisir sa couleur (deux possibilités) ; soit sept cases sont bleues, et il faut choisir les deux cases rebelles, puis déterminer la couleur de chacune des deux. Cela fait au total $1 + 9 \times 2 + \binom{9}{2} \times 2 \times 2 = 163$ coloriages différents.
8. Il y a trois choix possibles pour la couleur de la case centrale, puis deux choix pour chacune des huit cases restantes, donc $3 \times 2^8 = 768$ coloriages possibles.
9. On peut choisir totalement indépendamment le coloriage de chaque colonne. Considérons donc les possibilités sur la première colonne :
   - la case du haut est bleue, ce qui impose une case verte au milieu, et on peut mettre n'importe quelle couleur en bas, trois possiblités.
   - la case du haut est rouge ou verte, mais celle du milieu est bleue, ce qui impose une case verte en bas, deux autres possibilités.
   - la case du haut est rouge ou verte, et celle du milieu également, on peut choisir ce qu'on veut pour celle du bas, $2 \times 2 \times 3 = 12$ possibilités.

   Ce qui fait 17 possibilités pour colorier la première colonne, et évidemment autant pour chacune des deux autres. Soit un total de $17^3 = 4\ 913$ coloriages.

Problème

Première partie :

1. C'est une récurrence assez simple : c'est vrai pour p_0 et q_0 qui sont égaux à 1, et si on suppose que p_n et q_n sont deux entiers strictement positifs, $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ le seront certainement aussi, ce qui achève la récurrence.
2. On calcule $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, $p_2 = 7$, $q_2 = 5$, $p_3 = 17$ et $q_3 = 12$, d'où $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{7}{5}$ et $u_3 = \frac{17}{12}$.
3. Même pas besoin de récurrence : comme $q_n > 0$, on a toujours $p_n + 2q_n > p_n + q_n$, soit $p_{n+1} > q_{n+1}$. Le seul cas d'égalité est obtenu pour p_0 et q_0.
4. On a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n$. Or, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ donc $2q_n = p_{n+1} - p_n$. On en déduit que $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + p_{n+1} - p_n = 2p_{n+1} + p_n$.
5. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et il y a deux racines $r = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. La suite est donc de la forme $p_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$, avec $p_0 = \alpha + \beta = 1$, et $p_1 = (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\beta = 3$. On obtient donc $\beta = 1 - \alpha$, puis $(1 + \sqrt{2})\alpha + 1 - \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\alpha = 3$, soit $2\sqrt{2}\alpha = 2 + \sqrt{2}$. Finalement, $\alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, et $\beta = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, donc $p_n = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1})$.
6. En effet, $q_{n+2} = q_{n+1} + p_{n+1} = q_{n+1} + 2q_n + p_n$, avec $p_n = q_{n+1} - q_n$, donc $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$. L'équation caractéristique n'ayant pas changé depuis tout à l'heure, il faut désormais déterminer α' et β' tels que $\alpha' + \beta' = 1$, et $\alpha'(1+\sqrt{2}) + \beta'(1-\sqrt{2}) = 2$, soit $\alpha'(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} = 2$, et $\alpha' = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, puis $\beta' = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$. On obtient finalement $q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1})$.
7. Tout cela nous donne $u_n = \frac{2\sqrt{2}}{2} \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}$. Comme $|1 - \sqrt{2}| < 1$ et $1 + \sqrt{2} > 1$, numérateur et dénominateur du deuxième quotient sont équivalents à $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$, donc le quotient a pour limite 1. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Deuxième partie :

1. On calcule $v_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$, puis $v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$, et enfin $v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \simeq 1.414$.
2. La suite est définie si $v_n \neq 0$, donc prouver par récurrence que $v_n \in [1; 2]$ suffit. C'est vrai pour v_0, et si on le suppose vrai pour v_n, on a alors $\frac{2}{v_n} \in [1; 2]$ également, donc $v_n + \frac{2}{v_n} \in [2; 4]$, et $v_{n+1} \in [1; 2]$, ce qui achève la récurrence.
3. On a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = \sqrt{2}$, la fonction f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
4. Si $f(x) = x$, on a donc $x + \frac{2}{x} = 2x$, soit $\frac{2}{x} = x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $x^2 = 2$, soit $x = \sqrt{2}$. La suite (v_n) ne peut avoir pour limite que $\sqrt{2}$.
5. Par un calcul similaire, $f(x) - x$ est positif sur $[0; \sqrt{2}]$, et négatif sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

6. L'énoncé racontait n'importe quoi pour cette question : si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, on aura certainement $v_{n+1} \in [\sqrt{2}; 2]$ (au vu du tableau de variations de la fonction f), mais si $v_n \in [\sqrt{2}; 2]$, v_{n+1} appartiendra aussi à l'intervalle $[\sqrt{2}; 2]$. Comme $f(x) - x \leqslant 0$, sur $[\sqrt{2}; 2]$, on peut en déduire qu'à partir du moment où v_n appartient à cet intervalle, on aura $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite (v_n) est en fait décroissante à partir du rang 1, puisque seulo $v_0 = 1$ appartient à l'intervalle $[1; \sqrt{2}]$, tous les autres termes de la suite sont dans $[\sqrt{2}; 2]$ (ce qu'on peut prouver rigoureusement avec une petite récurrence).
7. Calculons $2v_n(v_{n+1} - \sqrt{2}) = v_n \left(v_n + \dfrac{2}{v_n} - 2\sqrt{2} \right) = v_n^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2 = (v_n - \sqrt{2})^2$. Comme $v_n \in [1; 2]$, $|2v_n| \geqslant 2$, et $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$. On en déduit que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{|v_n - \sqrt{2}||v_n - \sqrt{2}|}{|2v_n|} \leqslant \dfrac{|v_n - \sqrt{2}|}{2}$.
8. On le prouve par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident puisqu'on a la même chose à gauche et à droite. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors au rang $n+1$ en utilisant la question précédente $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|v_0 - \sqrt{2}|$, ce qui achève la récurrence.
9. D'après le théorème des gendarmes et le résultat précédent, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - \sqrt{2}| = 0$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2}$.

Troisième partie :

1. Manifestement, c'est v_3 qui fait la course en tête.
2. On a $u_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = 1 + \dfrac{1}{1 + u_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$. On a donc $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} = \dfrac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}$.
3. Nous avons $t_{n+1} = \dfrac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n} \dfrac{u_n + 1}{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})(u_n + 1)}{2v_n(1 - \sqrt{2})} t_n$.
4. Parmi les termes de l'affreux quotient de la question précédente, on a $v_n - \sqrt{2}$ qui a pour limite 0, et tous les autres ont une limite finie (non nulle), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0$.
5. De la question précédente, on déduit qu'à partir d'un certain rang n_0, $\left| \dfrac{t_{n+1}}{t_n} \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on pourrait prendre autre chose que $\dfrac{1}{2}$, peu importe), donc $\forall n > n_0$ $|t_n| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_{n-1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|t_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|t_{n_0}|$ (on fait une jolie récurrence si on veut être rigoureux). Par théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |t_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Cela signifie que $v_n - \sqrt{2}$ est négligeable par rapport à $u_n - \sqrt{2}$, donc que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ beaucoup plus rapidement que la suite (u_n).