Devoir Maison n°3

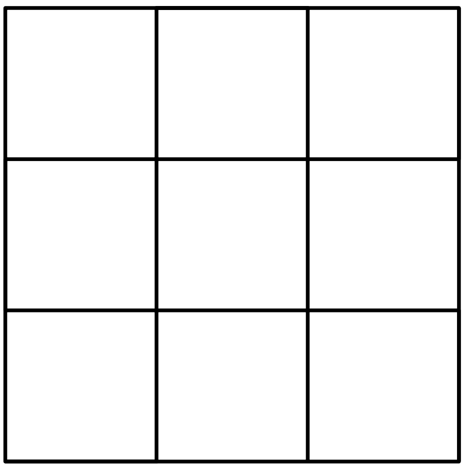
ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 9 décembre 2011

Exercice

On considère une grille de morpion (trois lignes, trois colonnes) dont on veut colorier chacune des cases en bleu, en vert ou en rouge (aucune case ne doit rester blanche). Combien y a-t-il de coloriages possibles respectant chacune des conditions suivantes :

1. La case centrale de la grille est bleue.
2. Chaque ligne contient trois cases de la même couleur.
3. Chaque ligne contient trois cases de couleurs différentes.
4. Aucune case de la grille n'est rouge.
5. La grille contient deux cases vertes, quatre rouges et trois bleues.
6. Les quatre coins de la grille sont de la même couleur.
7. Il y a au moins sept cases bleues dans la grille.
8. Aucune des huit cases du bord n'est de la même couleur.
9. Si une case bleue n'est pas sur la dernière ligne, il y a nécessairement une case verte en dessous.



Problème

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de certaines suites convergeant vers $\sqrt{2}$. Dans les deux premières parties, on introduit deux suites différentes ayant cette limite, et dans la troisième partie, on cherche à comparer la rapidité de leur convergence vers $\sqrt{2}$.

Première partie :

On définit dans cette partie les deux suites (p_n) et (q_n) par $p_0 = q_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. On pose enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer les valeurs de p_1, q_1, p_2, q_2, p_3 et q_3, et en déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant q_n$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
5. Calculer la valeur du terme général de la suite (p_n).
6. Montrer que (q_n) vérifie la même relation de récurrence que (p_n), et calculer également son terme général.
7. En déduire une formule explicite pour u_n, puis la limite de la suite (u_n).

Deuxième partie :

On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 (donner pour v_3, outre la valeur exacte, une valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Étudier les variations de la fonction f (sur son intervalle de définition).
4. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$, en déduire les limites possibles pour la suite (v_n).
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
6. Montrer que, si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, alors $v_{n+1} \in [\sqrt{2}; 2[$, et si $v_n \in [\sqrt{2}; 2[$, alors $v_{n+1} \in [1; \sqrt{2}[$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$. En déduire que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}|$.
8. En utilisant le résultat de la question précédente, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}|$.
9. En déduire la limite de la suite (v_n).

Troisième partie :

On cherche désormais à comparer la vitesse de convergence des suites (u_n) et (v_n) introduites dans les parties précédentes vers $\sqrt{2}$, et on pose pour cela $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Au vu des valeurs de u_3 et v_3 calculées précédemment, quelle semble être la suite qui converge le plus vite ?
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, en déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}(u_n - \sqrt{2})$.
3. En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 7. de la deuxième partie, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Que peut-on conclure de ce calcul concernant la rapidité de convergence des deux suites (u_n) et (v_n) ?