Devoir à la Maison n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 novembre 2011

Exercice 1

1. Posons donc $v_n = u_n + an$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1) = \frac{1}{2}u_n + n + 2 + an + a = \frac{1}{2}u_n + (1+a)n + 2 + a$. On voudrait mettre cette dernière expression sous la forme $\alpha v_n + \beta$ (évitons de reprendre la notation a déjà utilisée dans la définition de v_n). Ainsi on cherche à avoir $\frac{1}{2}u_n + (1+a)n + 2 + a = \alpha(u_n + an) + \beta = \alpha u_n + \alpha an + \beta$, ce qui ne peut se produire que si $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha a = 1 + a$ et $\beta = 2 + a$, soit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}a = 1 + a$, donc $a = -2$, et enfin $\beta = 0$. La suite définie par $v_n = u_n - 2n$ est donc simplement géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Comme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 = 1$, on en déduit que $v_n = \frac{1}{2^n}$, puis $u_n = v_n + 2n = 2n + \frac{1}{2^n}$.
3. Calculons donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2k + \frac{1}{2^k} = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = n(n+1) + 2 - \frac{1}{2^n}$.

Exercice 2

1. Partons donc de la forme finale : $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+4} = \frac{a(k+2)(k+4) + bk(k+4) + ck(k+2)}{k(k+2)(k+4)} = \frac{a(k^2+6k+8) + b(k^2+4k) + c(k^2+2k)}{k(k+2)(k+4)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (6a+4b+2c)k + 8a}{k(k+2)(k+4)}$. Pour que l'identification fonctionne, on doit donc avoir $a + b + c = 0$, $6a + 4b + 2c = 0$ et $8a = 1$, soit $a = \frac{1}{8}$, $b + c = -\frac{1}{8}$ et $4b + 2c = -\frac{3}{4}$. On peut procéder par substitution : $c = -\frac{1}{8} - b$, donc $4b - \frac{1}{4} - 2b = -\frac{3}{4}$, soit $2b = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Reste $c = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{k+2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{k+4}$.
2. Il se produit un superbe télescopage, qu'on peut par exemple rédiger avec des changements d'indices :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4} \times \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k+4} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{k=n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{8} \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&\quad -\frac{1}{8} \left(\sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4(n+2)} \\
&\quad + \frac{1}{8(n+1)} + \frac{1}{8(n+2)} + \frac{1}{8(n+3)} + \frac{1}{8(n+4)} \\
&= \frac{12+4+3-8}{96} + \\
&\quad \frac{-(n+2)(n+3)(n+4) - (n+1)(n+3)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+3)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} + \\
&\quad \frac{-(n^3+9n^2+26n+24) - (n^3+8n^2+19n+12) + (n^3+7n^2+14n+8) + (n^3+6n^2+11n+6)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{4n^2+20n+22}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}
\end{aligned}
$$

3. Essayons donc de prouver par récurrence la propriété

   $P_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

   Pour $n = 1$, la somme se réduit à $\dfrac{1}{1 \times 3 \times 5} = \dfrac{1}{15}$, et la formule donne comme valeur $\dfrac{11}{96} - \dfrac{2+10+11}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \dfrac{11}{96} - \dfrac{23}{480} = \dfrac{55}{480} - \dfrac{23}{480} = \dfrac{32}{480} = \dfrac{1}{15}$, donc la propriété P_1 est vérifiée.

   Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{(2n^2+10n+11)(n+5) - 4(n+2)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+10n^2+11n+10n^2+50n+55-4n^2-24n-32}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+16n^2+37n+23}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}
\end{aligned}$$

On constate que -1 est racine évidente du numérateur de la deuxième fraction, on peut donc écrire $2n^3 + 16n^2 + 37n + 23 = (n+1)(an^2 + bn + c) = an^3 + (a+b)n^2 + (b+c)n + c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = 14$ et $c = 23$. On peut donc écrire, en reprenant le calcul précédant, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+14n+23}{4(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$. Le dénominateur de la deuxième fraction est bien celui donné par la formule de P_{n+1}, reste à vérifier que le numérateur est le bon, il devrait être égal à $2(n+1)^2+10(n+1)+11 = 2(n^2+2n+1)+10n+10+11 = 2n^2+14n+23$, c'est exactement ce qu'on a obtenu. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée et, par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier n.

Exercice 3

1. Jusque là, tout va bien, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.
2. Pour voir si f est injective, considérons deux réels x et x' tels que $f(x) = f(x')$, soit $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = \dfrac{2x'^2}{x'^2-1}$, ce qui donne $2x^2(x'^2-1) = 2x'^2(x^2-1)$ puis $-2x^2 = -2x'^2$. Ceci n'implique pas que $x = x'$ (on peut aussi avoir $x = -x'$), la fonction n'est pas injective. On a par exemple $f(2) = f(-2) = \dfrac{8}{3}$. Pour la surjectivité, cherchons les antécédents d'un réel quelconque y, et partons donc de $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. Cela implique $yx^2 - y = 2x^2$, soit $x^2(y-2) = y$, ou encore $x^2 = \dfrac{y}{y-2}$. Cette équation n'a pas de solution lorsque $y = 2$ (mais aussi lorsque $y \in]0; 2[$), donc la fonction f n'est pas non plus surjective.
3. Sur l'ensemble en question, f devient injective puisque seul l'antécédent positif de y est valable (et il y en a toujours un positif et un négatif parmi les deux). Reste à déterminer quels sont les valeurs de y pour lesquelles $x^2 = \dfrac{y}{y-2}$ admet une solution, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\dfrac{y}{y-2} \geqslant 0$. Un petit tableau de signe permet de déterminer que l'ensemble d'arrivée de f sera $]-\infty; 0]\cup]2; +\infty[$.
4. D'après les calculs précédents, g est définie sur $]-\infty; 0]\cup]2; +\infty[$ par $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{y-2}}$ (on garde l'antécédent positif de y).

Exercice 4

1. Prouvons donc par récurrence double la propriété $P_n : u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.
   Pour $n = 0$, la formule de droite est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = u_0$ donc P_0 est vérifiée.
   Pour $n = 1$, la formule de droite est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = u_1$ donc P_1 est vérifiée.
   Supposons désormais les formules exactes au rang n et au rang $n+1$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.
   Notons φ et φ' les deux nombres $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a donc $u_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} + \varphi^{n+1} - \varphi'^{n+2} - \varphi'^{n+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}(\varphi+1) - \varphi'^{n+1}(\varphi'+1))$. On devrait avoir comme formule $u_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+3} - \varphi'^{n+3})$. Il suffit donc de prouver que $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $\varphi' + 1 = \varphi'^2$ pour prouver P_{n+2}. Or l'équation $x + 1 = x^2$, ou $x^2 - x - 1 = 0$, a pour discriminant $\Delta = 5$, et admet pour racines φ et φ'. La propriété P_{n+2} est donc vérifiée et, par principe de récurrence double, la formule est vraie pour tous les termes de la suite.
2. Démontrons donc par récurrence la propriété $P_n : u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.
   Pour $n = 0$, $u_2 \times u_0 - u_1^2 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$, donc la propriété P_0 est vraie.
   Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, en utilisant la définition de la suite, on a alors $u_{n+3}u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (u_{n+1} + u_{n+2})u_{n+1} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}^2 + u_{n+2}(u_{n+1} - u_{n+2})$. Or, comme $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$, on a $u_{n+1} - u_{n+2} = -u_n$, donc $u_{n+3}u_{n+1} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n$. C'est exactement l'opposé du membre de gauche de P_n, donc cela vaut par hypothèse de récurrence $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$. Ainsi la propriété P_{n+1} est vrai, et par principe de récurrence, la relation est valable pour tout entier n.
3. Simples calculs : $S_0 = u_0 = 1$; $S_1 = u_0 + u_1 = 1+1 = 2$; $S_2 = 1+1+2 = 4$; $S_3 = 1+1+2+3 = 7$ et $S_4 = 1+1+2+3+5 = 12$.
4. On va bien évidemment démontrer par récurrence la propriété $P_n : S_n = u_{n+2} - 1$.
   Pour $n = 0$, on a $S_0 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$, donc P_0 est vérifiée.
   Supposons P_n vraie, alors $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} u_k = S_n + u_{n+1}$, ce qui est égal par hypothèse de récurrence à $u_{n+2} - 1 + u_{n+1}$. Par définition de la suite, $u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+3}$, donc $S_{n+1} = u_{n+3} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pout tout entier n.
5. PROGRAM sommefibo ;
   USES wincrt ;
   VAR u,v,w,i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   u :=1 ; v :=1 ;
   FOR i :=1 TO n+1 DO

```
BEGIN
w :=u+v;
u :=v;
v :=w;
END;
WriteLn('La somme est égale à ',v-1);
END.
```