Devoir à la Maison n°2

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 4 novembre 2011

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n + 2$.

1. Déterminer une valeur de a pour laquelle la suite auxiliaire $v_n = u_n + an$ est une suite géométrique.
2. En déduire la valeur de v_n puis celle de u_n.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+4}$.
2. En déduire la valeur de la somme cherchée.
3. Redémontrer la formule obtenue à la question précédente par récurrence.

Exercice 3

On considère l'application f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de départ de l'application f.
2. L'application est-elle surjective ? Injective (on pourra déterminer, pour tout réel y, le nombre d'antécédents de y par f) ?
3. Montrer que f est bijective de $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
4. Donner une expression de la réciproque de f sur cet ensemble.

Exercice 4

On s'intéresse dans ce dernier exercice à quelques propriétés de la suite de Fibonacci qui, rappelons-le, est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On ne demande pas de refaire le calcul du terme général, qui vaut $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

1. Redémontrer quand même par récurrence double la magnifique formule rappelée ci-dessus.
2. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.
3. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.
4. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_{n+2} - 1$.
5. Écrire un programme Pascal demandant une valeur de n à l'utilisateur et calculant la valeur de S_n.