

Devoir Maison n°1

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 30 septembre 2011

Exercice 1

Le retour du VRAI/FAUX. Justifier soigneusement chaque réponse (démontrer les résultats vrais, donner des contre-exemples quand c'est faux, éventuellement citer une hypothèse à ajouter pour rendre l'énoncé vrai) :

1. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{N}, n \leq p$.
2. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, n \leq p$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, x = \ln y$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \neq x \in \mathbb{R}, |y| = |x|$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < y < z$.
6. $\forall x > 0, \forall y > 0, \exists z > 0, yz > x$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \left| \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} \right|$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Ecrire $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue, en distinguant des cas suivant les valeurs de x .
3. Déterminer les antécédents par f de 2, de 0 et de 5.
4. Dériver la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$, et dresser son tableau de variations (on essaiera de calculer également les limites intéressantes).
5. En déduire les variations de la fonction f .
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 1.
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 3 (d'après vieux sujet de bac)

On considère la famille de fonctions f_k (k étant un entier naturel) définie par les équations $f_k(x) = x^k e^{-x}$.

1. Étudier les variations et donner les limites des fonctions f_1, f_2 et f_3 . Préciser les équations de leur tangentes à l'origine du repère.
2. Montrer que leurs courbes représentatives, ainsi que celles des autres fonctions de la famille, ont deux points communs à préciser.
3. Étudier les variations de la fonction f_k , en distinguant deux cas selon la parité de k . On donnera également les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f_k (on pourra distinguer ce qui se passe sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_-).
5. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3 (en tenant évidemment compte de tous les calculs effectués).