Mathématiques I : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

23 mai 2012

Exercice 1

1. En effet, $1+0+0=0+1+0=0+0+1=1$ donc $I \in E$ et $s(I)=1$; pour J les sommes sont toutes identiques et égales à $1+1+1$ donc $s(J)=3$.
2. Il faut avoir $1+x+y=6=x-1=x-1=x-1=y+8$, ce qui donne $x=7$ et $y=-2$. Toutes les équations sont alors bien vérifiées (et accessoirement $s(K)=6$).
3. Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$, alors
$AB = \begin{pmatrix} a_1a'_1+a_2b'_1+a_3c'_1 & a_1a'_2+a_2b'_2+a_3c'_2 & a_1a'_3+a_2b'_3+a_3c'_3 \\ b_1a'_1+b_2b'_1+b_3c'_1 & b_1a'_2+b_2b'_2+b_3c'_2 & b_1a'_3+b_2b'_3+b_3c'_3 \\ c_1a'_1+c_2b'_1+c_3c'_1 & c_2a'_2+c_2b'_2+c_3c'_2 & c_3a'_3+c_2b'_3+c_3c'_3 \end{pmatrix}$
La somme des termes de la première ligne correspond exactement au développement de $(a_1+a_2+a_3)(a'_1+b'_1+c'_1) = s(A)s(B)$. Des calculs très similaires prouvent que les cinq autres sommes sont identiques.
4. (a) On calcule $AJ = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Similairement, $JA = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$
   (b) Il suffit d'écrire l'égalité des neuf coefficients de AJ et JA pour constater qu'elles se ramènent aux égalités des six sommes du début de l'énoncé.
   (c) Dans le cas où $A \in E$, chacun des coefficients de AJ correspondant à l'une des six sommes égales à $s(A)$, on a $AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J$.
5. Si A est inversible, on peut multiplier l'égalité $AJ = s(A)J$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $J = s(A)A^{-1}J$. De même, comme $AJ = JA$, on aura $J = JAA^{-1} = AJA^{-1} = s(A)JA^{-1}$. Autrement dit, $A^{-1}J = JA^{-1} = \dfrac{1}{s(A)}J$ (ici, $s(A)$ ne peut être nul sinon au vu des relations obtenues on aurait $J=0$, ce qui n'est manifestement pas le cas). La caractérisation de smatrices de E vue précédemment permet alors d'affirmer que $A^{-1} \in E$, et que $s(A^{-1}) = \dfrac{1}{s(A)}$.
6. (a) Calculons $JB = \dfrac{1}{3}s(A)J^2$, et $\dfrac{1}{3}BJ = s(A)J^2$. Les deux matrices sont égales, donc $B \in E$.
   (b) On a $BC = BA - B^2 = \dfrac{1}{3}s(A)JA - \dfrac{1}{9}s(A)^2J^2 = \dfrac{1}{3}s(A)^2J - \dfrac{1}{3}s(A)^2J^2$. Comme $J^2 = 3J$, on a $BC = \dfrac{1}{3}s(A)^2J - \dfrac{1}{3}s(A)^2J = 0$. De même, $CB = 0$.

(c) On vient de voir que B et C commutent, on peut donc écrire, en utilisant la formule du binome de Newton, que $(B+C)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$. Dans cette somme, seuls le premier et le dernier terme sont non nuls (dans tous les autres, on a un produit BC qui est nul), donc $(B+C)^n = B^n + C^n$. Comme $C = A - B$, cela donne $(B + A - B)^n = B^n + (A - B)^n$, ou encore $(A - B)^n = A^n - B^n$.

(d) On a $A = B + C$, où B est proportionnelle à J. Reste donc à vérifier que $C \in F$. En effet, $CJ = AJ - BJ = s(A)J - \frac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J - s(A)J = 0$, de même pour JA. La matrice C est donc bien dans E, avec $s(C) = 0$. Autrement dit, $C \in F$.

Exercice 2

1. (a) Ca semble évident, mais pour le prouver rigoureusement, rien de tel qu'une bonne récurrence. On a évidemment $X_0(\Omega) = \{0\}$. Ensuite, si on suppose $X_n(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$, le mobile peut avancer d'une case à partir de n'importe quelle case où il se trouve, donc se trouver sur une des cases $1; 2; \dots; n+1$; ou revenir à la case 0, ce qui donne bien $X_{n+1}(\Omega) = \{0; 1; \dots; n+1\}$.

   (b) Le système indiqué forme un système complet d'événements au vu de la question précédente, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k) \times P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0)$. Or, toutes ces probabilités conditionnelles sont égales à $\frac{2}{3}$ au vu de l'énoncé, donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k)$. Cette dernière somme valant 1 (c'est la somme des probabilités correspondant à la variable aléatoire X_{n-1}), on a donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.

2. (a) On peut utiliser à nouveau la formule des probabilités totales (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles sauf une), ou plus simplement signaler que, pour avoir $X_n = k$ avec $k \neq 0$, on doit avoir $X_{n-1} = k - 1$ et avancer d'une case, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$.

   (b) Pour éviter une récurrence (forte qui plus est), utilisons une rédaction moins rigoureuse : $P(X_n = k) = \frac{1}{3}P(X_{n-1} = k - 1) = \frac{1}{3^2}P(X_{n-2} = k - 2) = \cdots = \frac{1}{3^k}P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{3^k} \times \frac{2}{3}$. Cette formule est d'ailleurs également valable lorsque $k = 0$. De même, on obtient simplement $P(X_n = n) = \frac{1}{3^n}P(X_0 = 0) = \frac{1}{3^n}$ (puisque l'événement $X_0 = 0$ est certain, contrairement à $X_{n-k} = 0$ quand $k < n$). Ce dernier résultat est logique : pour se retrouver sur la case n après n instants, il faut à chaque fois avancer d'une case (et donc ne jamais revenir à la case 0), ce qui se produit à chaque instant avec probabilité $\frac{1}{3}$.

   (c) Calculons donc $\sum_{k=0}^{k=n} P(X_n = k) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} = 1$.

3.
```
Program cb2 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
```

```
        X:=0;
        For k:=1 to n do
        begin
            u := random(3) ;
            if (u = 2) then X := X+1;
                else X := 0;
            end ;
        Writeln (X) ;
    end.
```

4. (a) Calculons donc en développant : $(1-p)^2\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}-2\sum_{k=1}^{n-1}kp^k+\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)p^k-2\sum_{k=1}^{n-1}kp^k+\sum_{k=2}^{n}(k-1)p^k=\sum_{k=0}^{n-2}p^k+\sum_{k=0}^{n-2}kp^k-2\sum_{k=1}^{n-1}kp^k+\sum_{k=2}^{n}kp^k-\sum_{k=2}^{n}p^k=1+p-p^{n-1}-p^n+p-2p-2(n-1)p^{n-1}+(n-1)p^{n-1}+np^n=1-np^{n-1}+(n-1)p^n$.

   (b) On sait que $E(X_n)=\sum_{k=1}^{k=n}kP(X_n=k)=\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{1}{3^{k-1}}+\frac{n}{3^n}$. En appliquant le résultat précédent à $p=\frac{1}{3}$, on a $\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{1}{3^{k-1}}=1-\frac{n}{3^{n-1}}+\frac{n-1}{3^n}$, donc $E(X_n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{3^{n-1}}+\frac{n-1}{3^n}\right)+\frac{n}{3^n}=\frac{1}{2}+\frac{n-1-3n+2n}{2\times 3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}$.

5. (a) En effet, en développant, $E(X_{n+1}^2)=\sum_{k=1}^{n+1}k^2P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1}k^2P(X_n=k-1)=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2P(X_n=k)=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}k^2P(X_n=k)+2\sum_{k=0}^{n}kP(X_n=k)+\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)\right)$.
   On reconnait dans la première sonmme $E(X_n^2)$, dans la deuxième $E(X_n)$, et la dernière vaut 1 (somme des probabilités de la variable X_n), d'où la formule.

   (b) Allons-y : $u_{n+1}=E(X_{n+1}^2)+\frac{1}{2}\times\frac{2n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}(E(X_n^2)+2E(X_n)+1)+\frac{1}{2}\times\frac{2n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2\times 3^n}+\frac{1}{3}+\frac{n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2\times 3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}-\frac{1}{\times 3^{n+1}}+\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}+\frac{2n-1}{2\times 3\times 3^n}=\frac{1}{3}\left(E(X_n^2)+\frac{2n-1}{2\times 3^n}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}$.

   (c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, qui donne $x=1$. On pose donc $v_n=u_n-1$, et on a $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}(u_n-1)=\frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-1=E(X_0^2)+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{3^0}-1=0-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$. On en conclut que $v_n=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3^n}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$, puis $u_n=v_n+1=1-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$. Ne reste plus qu'à en déduire que $E(X_n^2)=u_n-\frac{2n-1}{2\times 3^n}=1+\frac{1-2n-3}{2\times 3^n}=1-\frac{n+1}{3^n}$.

   (d) On peut enfin, pour terminer, appliquer la formule de König-Huygens, qui donne $V(X_n)=E(X_n^2)-(E(X_n))^2=1-\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2\times 3^n}-\frac{1}{4\times 3^{2n}}$.

Exercice 3

1. (a) Si personne n'est contagieux au jour n (c'est ce que signifie $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n+1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), soit $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$, et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (b) Si tout les individus sont contagieux au jour n (hypothèse $X_n = 3$), d'après l'énoncé, ils seront tous sains le jour $n+1$ donc $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (c) Si on suppose $X_n = 1$ réalisé, il y a donc un individu contagieux au jour n et deux individus sains. Chacun de ces deux individus a donc une probabilité $p = \frac{1}{3}$ de devenir contagieux, le nombre de personnes contaminées suivra donc bien une loi binômiale de paramètre $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.
   Si $X_n = 2$, il y a cette fois-ci un seul individu sain (et donc suscptible d'être contaminé), donc X_{n+1} suivra une loi de Bernouilli. Reste à déterminer son paramètre, c'est-à-dire la probabilité que l'individu sain soit contaminé, sachant qu'il a deux possibilités de se faire contaminer puisqu'il y a deux malades. Autrement dit, la probabilité qu'il ne soit **pas** contaminé vaut $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. La loi de X_{n+1} sera donc bien binômiale de paramètre $\left(1; \frac{5}{9}\right)$.

   (d) D'après la question précédente, il s'agit simplement de calculer des espérances de lois binômiales, donc $E_{X_n=1}(X_{n+1}) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1}) = \frac{5}{9}$.

2. (a) On a donc la loi suivante pour X_0 : $P(X_0 = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $P(X_0 = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$; $P(X_0 = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$ et $P(X_0 = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$. Les quatre évènements dont on vient de calculer les probabilités forment un système complet d'évènements, on peut appliquer (quatre fois) la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1.
   Commençons par préciser les probabilités conditionnelles manquantes : au vu de la question c, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{5}{9}$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 0$; et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \binom{2}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{9}$.
   On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0) \times P_{X_0=0}(X_1 = 0) + P(X_0 = 1) \times P_{X_0=1}(X_1 = 0) + P(X_0 = 2) \times P_{X_0=2}(X_1 = 0) + P(X_0 = 3) \times P_{X_0=3}(X_1 = 0) = \frac{8}{27} \times 1 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{27} \times 1 = \frac{51}{81}$. De même, $P(X_1 = 1) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{27} \times 0 = \frac{26}{81}$; $P(X_1 = 2) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times 0 + \frac{1}{27} \times 0 = \frac{4}{81}$, et $P(X_1 = 3) = 0$ (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles). Résumons tout cela dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

   D'où une espérance $E(X_1) = \frac{26 + 2 \times 4}{81} = \frac{34}{81}$.

(b) Calculons la somme en question en reprenant les résultats de la question 3.d) : $\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1)\times P(X_0=i) = 0\times\frac{8}{27}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\times\frac{2}{9}+0\times\frac{1}{27}=\frac{34}{81}$, l'égalité est vérifiée.

3. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on aura $u_n+v_n+w_n+t_n=1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} U_n,$$

c'est-à-dire que $M=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) i. Appliquons donc dans la joie et la bonne humeur le pivot de Gauss à notre matrice R :

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4+L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1-5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3-L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse $R^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ii. C'est un calcul peu passionnant : $R^{-1}S=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR=$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

iii. Notons D la matrice diagonale calculée à la question précédente, et prouvons par récurrence que $S^n = RD^nR^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, car $S = R(R^{-1}SR)R^{-1} = RDR^{-1}$; en supposant la formule exacte au rang n, on a ensuite $S^{n+1} = S \times S^n = (RDR^{-1})(RD^nR^{-1}) = RD^{n+1}R^{-1}$. On en déduit donc que $S^n = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} R^{-1}$, soit

$$S^n = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \frac{1+5^{n+1}}{6} & \frac{5^{n+1}-5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5^n-1}{6} & \frac{5^n+5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) On constate simplement que $M = \frac{1}{9}S$, donc $M^n = \frac{1}{9^n}S^n$.

(e) Une petite récurrence permet de prouver que $U_n = M^nU_0$ (en effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = M(M^nU_0) = M^{n+1}U_0$), donc en effectuant le produit matriciel sur les deux premières lignes, $u_n = \frac{1}{9^n}(9^nu_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^nt_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$; et $v_n = \frac{1}{9^n}\left(\frac{1+5^{n+1}}{6}v_0 + \frac{5^{n+1}-5}{6}w_0\right) = \frac{v_0 - 5w_0}{6 \times 9^n} + \frac{5^{n+1}(v_0 - w_0)}{6 \times 9^n}$.

(f) Le calcul des limites des expressions précédentes ne pose aucune difficulté : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Inutile de s'embêter à donner les valeurs de t_n et w_n, la somme des quatre probabilités étant égale à 1 et u_n tendant vers 1, les trois autres convergent nécessairement vers 0 (c'est une conséquence des gendarmes et de la positivité des probabilités, par exemple $0 \leqslant t_n = 1 - u_n - v_n - w_n \leqslant 1 - u_n$). Cela signifie qu'à terme, le virus finira par être éradiqué, et ce quelle que soit la situation initiale, puisque les limites ne dépendent pas des valeurs initiales des suites.