Concours Blanc : épreuve de Mathématiques I

ECE3 Lycée Carnot

23 mai 2012

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix à condition d'indiquer clairement dans sa copie les résultats admis. La notation prend en compte la qualité de la rédaction et de la présentation de la copie.

L'utilisation des calculatrices est interdite pour cette épreuve.

Exercice 1

On considère une matrice carrée d'ordre 3 notée $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. On note E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices vérifiant $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_1 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$. Dans le cas où $A \in E$, on notera $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note également I la matrice identité d'ordre 3, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que I et J appartiennent à E, et déterminer les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.
2. Soit K la matrice définie par $K = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -2 & 5 & 3 \\ x & -6 & 5 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux réels. Déterminer les valeurs de x et y pour que K appartienne à E.
3. Soient A et B deux matrices de E, montrer que $AB \in E$ et que $s(AB) = s(A)s(B)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AJ et JA.
   (b) Montrer que A appartient à E si et seulement si $AJ = JA$.
   (c) Vérifier que, si $A \in E$, alors $AJ = s(A)J$.
5. Soit A une matrice inversible de E. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $A^{-1} \in E$, que $s(A) \neq 0$, et exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.
6. Soit $A \in E$, on note $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$. On note également $F = \{M \in E \mid s(M) = 0\}$.
   (a) Montrer que B appartient à E.
   (b) Calculer BC et CB.
   (c) En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $(A - B)^n = A^n - B^n$.
   (d) Montrer que toute matrice de E peut s'écrire comme somme d'une matrice de F et d'une matrice proportionnelle à J.

Exercice 2

Un mobile se déplace sur un axe constitué d'une suite (infinie) de cases numérotées 0, 1, 2, ...
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur la case numéro k à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, il avancera sur la case $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, ou reviendra à la case 0 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case sur laquelle se trouve le mobile à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

1. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.
2. (a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{3} P(X_n = k-1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, $P(X_n = k) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^k}$. En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
3. On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program cb2 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X:=0;
     For k:=1 to n do
     begin
          u := random(3) ;
          if (u = 2) then X :=.........;
               else X :=.......;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

4. (a) Calculer (et simplifier) $(1-p)^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1}$, où $p \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.
5. (a) Montrer, en utilisant la question 2.a), que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{3}(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + \frac{1}{2} \times \frac{2n-1}{3^n}$.
   Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction n.
   (d) Calculer enfin $V(X_n)$.

Exercice 3

Dans une famille de 3 individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette famille deux catégories d'individus : les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, et les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces deux catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité $\frac{1}{3}$ (ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres), et devient alors contagieux au jour $n+1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

1. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle $P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle $P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)$.

   (c) Vérifier qu'en supposant l'évènement $X_n = 1$ réalisé (respectivement $X_n = 2$ réalisé), la loi de X_{n+1} est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \frac{5}{9}\right)$).

   (d) On note $E_{X_n=i}(X_{n+1})$ l'espérance de la loi obtenue pour la variable X_{n+1} en supposant vérifié l'évènement $X_n = i$. Déterminer les valeurs respectives de $E_{X_n=1}(X_{n+1})$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1})$.

2. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

   (b) Vérifier la formule suivante : $E(X_1) = \sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i)$.

3. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une relation simple entre u_n, v_n, w_n et t_n.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

   (c) On considère les matrices $S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

      ii. Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

      iii. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.

   (d) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.

   (e) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

   (f) Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n). Comment interpréter ce résultat ?