Concours Blanc n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 janvier 2012

Exercice 1

1. (a) Procédons à une identification : $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$. Cette quantité est égale à $\frac{1}{n(n+1)}$ si $a+b=0$ et $a=1$, soit $a=1$ et $b=-1$. Autrement dit, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

   (b) Au vu de la question précédente, $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum k = 1^{k=n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (somme télescopique). On constate que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, c'est-à-dire que la série converge et sa somme vaut 1.

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $n(n-1) \geqslant n \times n = n^2$, donc $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ (cette dernière inégalité n'est évidemment pas valable lorsque $n=1$, on isolera donc le premier terme de la somme dans le calcul suivant). On en déduit que $T_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(k+1)k} = S_n$.

   (b) La série est croissante (le terme général est positif), et au vu de l'inégalité précédente et de la convergence de (S_n) vers 1 (S_n étant elle-même croissante, on aura toujours $S_n \leqslant 1$), majorée par $1+1=2$. Elle converge donc vers une somme T vérifiant $T \leqslant 2$.

3. (a) Calculons donc $b_n - b_{n-1} = \frac{3n}{2n+1} - \frac{3n-3}{2n-1} = \frac{3n(2n-1)-(3n-3)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{3}{4n^2-1}$. Comme $4n^2 - 1 > 3n^2$ lorsque $n \geqslant 2$, on obtient $b_n - b_{n-1} < \frac{3}{3n^2} = v_n$.

   (b) Sommons les inégalités précédentes : $\sum_{k=1}^{k=n} v_k = 1 + \sum_{k=2}^{k=n} v_k > 1 + \sum_{k=2}^{k=n} b_k = 1 + b_n - b_1 = b_n$ (la dernière somme est télescopique, et $b_1 = 1$.

   (c) On a déjà démontré que $T \leqslant 2$. Utilisons désormais l'inégalité précédente : $T_n > b_n$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$, et un calcul immédiat donne $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{2}$. On en déduit que $\frac{3}{2} \leqslant T$, ce qui complète l'encadrement demandé.

Exercice 2

1. • Pour $n = 1$, le seul mot terne est a.

- Pour $n = 2$, un mot terne devrait commencer et finir par a, tout en ayant ses deux lettres (qui sont adjacentes) distinctes, c'est impossible. Il n'y a donc pas de mot terne de longueur 2.
- Pour $n = 3$, le mot doit commencer et finir par a, et la lettre médiane ne doit pas être un a, ce qui laisse les deux possibilités *aba* et *aca*.
- Pour $n = 4$, les deux lettres médianes ne peuvent à nouveau être des a (elles cotoient soit le a initial soit le a final), et doivent en plus être distinctes, ce qui ne laisse que les deux possiblités *abca* et *acba*.
- Pour $n = 5$, on peut choisir de mettre un a en lieu de mot, auquel cas les deuxième et quatrième lettre peuvent être un b ou un c indépendamment l'une de l'autre) ; mettre un b au milieu, ce qui impose de l'encadrer par deux c (puisque ces lettres sotoient à la fois un a et un b) ; ou enfin un c médian encadré par deux b. Cela fait un total de 6 possibilités : *ababa*, *abaca*, *acaba*, *acaca*, *acbca* et *abcba*.
- Pour $n = 6$, soit on met un a en troisième, on a deux possibilités pour la deuxième lettre (cf le cas $n = 2$), et deux pour les lettres 4 et 5 (cf le cas $n = 3$) ; soit on met un a en quatrième, ce qui donne quatre autres possibilités ; soit on ne met pas du tout de a en-dehors des extrêmités, et on a deux possibilités (on alterne des b et des c en commençant par l'un ou l'autre). Soit un total de 10 mots ternes de longueur 6 : *ababca*, *abacba*, *acabca*, *acacba*, *abcaba*, *acbaba*, *abcaca*, *acbaca*, *abcbca* et *acbcba*.

2. Considérons donc l'ensemble des mots termes de longueur n, pour un certain entier $n \geqslant 3$, et séparons-les en deux catégories selon la nature de la lettre placée en position $n-2$ dans le mot.
   - s'il s'agit d'un a, le mot obtenu en supprimant les deux dernières lettres de notre mot était déjà terme (il commençait et finissait par a, et ne pouvait certainement pas avoir deux lettres consécutives identiques si on veut que notre mot à nous soit terne). Par ailleurs, les deux dernières lettres de notre mot sont soit *ba*, soit *ca*. Réciproquement, à tout mot terne de longueur $n-2$, on peut bien associer deux mots ternes de longueur n en ajoutant soit *ba* soit *ca* à la fin du mot. Cette construction nous donne déjà $2 \times t_{n-2}$ mots ternes de longueur n.
   - si au contraire notre lettre numéro $n - 2$ n'est pas un a, mais par exemple un b, alors notre mot s'achève nécessairement par *bca* (s'iul s'agit d'un c il s'achève par *cba* et le raisonnement est le même). Considérons alors le mot obtenu en supprimant l'avant-dernière lettre de notre mot (ici le c), on retombe alors sur un mot terne (de longueur $n-1$) car on n'a sûrement pas fait apparaitre de lettres adjacentes identiques. Réciproquement, à partir de n'importe quel mot terne de longueur $n-1$, on peut en construire un (et un seul) en insérant la bonne lettre en avant-dernière position : si le mot de longueur $n - 1$ finit par *ba*, on introduit un c entre le b et le a ; s'il finit par *ca*, on introduit un b. On obtient ainsi exactement t_{n-1} nouveaux mots ternes de longueur n, qui sont évidemment distincts des précédents (puisque la lettre numéro $n - 2$ n'est pas la même).

   Globalement, on a bien trouvé $2t_{n-2} + t_{n-1}$ mots ternes de longueur n, soit $t_n = 2t_{n-2} + t_{n-1}$.
3. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2-x-2 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{1+3}{2} = 2$, et $s = \dfrac{1-3}{2} = -1$. On peut donc écrire t_n sous la forme $t_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où α et β sont deux constantes déterminées par les deux premiers termes de la suite. Ici, $t_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $t_2 = 4\alpha + \beta = 0$. En additionnant les deux équations, on obtient $6\alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{6}$; puis $\beta = 2\alpha - 1 = -\dfrac{2}{3}$. Finalement, $t_n = \dfrac{1}{6} \times 2^n - \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = \dfrac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$.

Problème

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = a_0 = 1$; $u_1 = 1 + \dfrac{1}{a_1} = 1 + 1 = 2$; $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$; $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+1}} = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$; et enfin $u_4 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{3}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{3}{8}} = 1 + \dfrac{8}{11} = \dfrac{19}{11}$.
2. On peut constater que, quelle que soit la parité de n, on a toujours $u_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{2+u_n}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{2+u_n+1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.
3. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2(2+x)-(3+2x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.
4. Constatons que $f(x) = x$ si $\dfrac{3+2x}{2+x} - x = 0$, soit $\dfrac{3-x^2}{2+x} = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \sqrt{3}$, et $x_2 = -\sqrt{3}$. Au vu du calcul précédent, le signe de $f(x) - x$ sera positif sur $]-\infty;-2]\cup]-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, et négatif sur $]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$.
5. Prouvons donc par récurrence que la suite u_{2n} est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. On a calculé plus haut $u_0 = 1$ et $u_2 = \dfrac{5}{3} < \sqrt{3}$, puisque $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} < 3$. De plus, on a bien $u_0 < u_2$. Supposons donc $1 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \sqrt{3}$ pour un certain entier n, alors la fonction f étant croissante sur l'intervalle $[1;\sqrt{3}]$, on aura $f(1) \leqslant f(u_{2n}) \leqslant f(u_{2n+2}) \leqslant f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{3} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant \sqrt{3}$, ce qui prouve l'hérédité de nos deux propriétés. Par principe de récurrence, la suite est bien croissante et majorée par $\sqrt{3}$. La démonstration est très similaire pour les termes d'indices impairs, en constatant que $\sqrt{3} \leqslant u_3 \leqslant u_1$, puis que $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$ implique $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+5}$ en utilisant la croissance de f.
6. Étant respectivement croissante et majorée, et décroissante et minorée, les deux suites convergent. Notons par exemple l la limite finie de la suite (u_{2n}). On a alors certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = l$. Or, au vu de la relation liant u_{2n+2} et u_{2n}, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \dfrac{3+2l}{2+l}$. Autrement dit, la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$, donc $l = \pm\sqrt{3}$. La suite étant par ailleurs minorée par son premier terme $u_0 = 1$, elle ne peut converger vers $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Le raisonnement est le même pour u_{2n+1}. Les termes d'indices pairs et impairs de la suite (u_n) convergeant vers $\sqrt{3}$, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente, de limite $\sqrt{3}$.

Étude de deux suites auxiliaires

1. C'est, pour chacune des deux suites, une récurrence double immédiate : les deux premiers termes de chaque suite sont des entiers naturels, et en supposant que p_n et p_{n+1} sont des entiers naturels, comme $a_{n+2} = 1$ ou $a_{n+2} = 2$, on aura très certainement $a_{n+2}p_{n+1} + p_n \in \mathbb{N}$, d'où l'hérédité de la proptiété. C'est évidemment la même chose pour q_{n+2}. Par principe de récurrence double, tous les termes des deux suites sont bien des entiers naturels.
2. Encore une récurrence double : $q_0 = 1 \geqslant 0$; $q_1 = 1 \geqslant 1$; et en supposant $q_n \geqslant n$ et $q_{n+1} \geqslant n+1$, comme $a_{n+2} \geqslant 1$, on aura $q_{n+2} \geqslant q_{n+1} + q_n \geqslant 2n+1 \geqslant n+2$ si $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, comme

$a_2 = 2$, on aura tout de même $q_2 = 3 \geqslant 2$. Dans tous les cas, l'hérédité est donc vérifiée, ce qui achève la récurrence.

3. C'est, pour changer, une récurrence simple. Pour $n = 2$, $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{p_1 x + p_0}{q_1 x + q_0}$. Supposons désormais la propriété vraie au rang n pour tout réel x strictement positif. On peut alors l'appliquer au nombre réel strictement positif $a_n + \dfrac{1}{x}$ pour obtenir $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}} = \dfrac{(a_n + \frac{1}{x})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x})q_{n-1} + q_{n-2}} = \dfrac{x a_n p_{n-1} + p_{n-1} + x p_{n-2}}{x a_n q_{n-1} + q_{n-1} + x q_{n-2}}$ $= \dfrac{x(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \dfrac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}$, ce qui prouve la formule pour x au rang n. La formule est donc vraie pour tout réel strictement positif, et pour tout entier supérieur ou égal à 2. Il suffit ensuite de l'appliquer à $x = a_n$ (qui est toujours strictement positif) pour obtenir $u_n = \dfrac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \dfrac{p_n}{q_n}$. Ceci étant vrai à partir de $n = 2$, il faut encore vérifier que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$ et $u_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, ce qui est vrai.

4. Encore une récurrence : $p_1 q_0 - q_1 p_0 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$ et, comme $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) p_n = p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$, la propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier.

5. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n}{q_{n+1} q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$, donc $|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1}{q_{n+1} q_n} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ puisqu'on a vu plus haut que $q_n \geqslant n$.

6. La série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente car c'est une série à termes positifs de terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum u_{n+1} - u_n$ est donc absolument convergente. Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_1$ (somme télescopique), on peut donc en déduire que u_{N+1} a une limite finie quand N tend vers $+\infty$, autrement dit que la suite (u_n) est convergente.

7. En utilisant la relation de récurrence définissant p_n, on a $r_{n+2} = p_{2n+4} = a_{2n+4} p_{2n+3} + p_{2n+2} = p_{2n+3} + p_{2n+2}$ puisque $a_{2n+4} = 1$. On a donc $r_{n+2} = a_{2n+3} p_{2n+2} + p_{2n+1} + p_{2n+2} = 3p_{2n+2} + p_{2n+1}$. Or, $p_{2n+2} = p_{2n+1} + p_{2n}$, donc $p_{2n+1} = p_{2n+2} - p_{2n}$, donc $r_{n+2} = 4p_{2n+2} - p_{2n} = 4r_{n+1} - r_n$.

8. La suite (r_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - 4x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$, et $s = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. On peut donc écrire $r_n = \alpha(2 + \sqrt{3})^n + \beta(2 - \sqrt{3})^n$, avec $r_0 = p_0 = 1 = \alpha + \beta$, et $r_1 = p_2 = 5 = \alpha(2 + \sqrt{3}) + \beta(2 - \sqrt{3})$. On a donc $\beta = 1 - \alpha$, et $5 = (2 + \sqrt{3})\alpha + 2 - \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})\alpha$, soit $2\sqrt{3}\alpha = 3 + \sqrt{3}$, et $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Ensuite, $\beta = 1 - \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$. Finalement, $p_{2n} = r_n = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})^n$.

9. En posant $s_n = q_{2n}$, la suite (s_n) vérifie la même relation de récurrence linéaire que (r_n) (puisque (p_n) et (q_n) vérifient elles-mêmes la même relation de récurrence double), donc $s_n = \gamma(2 + \sqrt{3})^n + \delta(2 - \sqrt{3})^n$, avec $q_0 = 1 = \gamma + \delta$, et $q_2 = 3 = \gamma(2 + \sqrt{3}) + \delta(2 - \sqrt{3})$. Des calculs similaires à ceux de la question précédente donnent $\gamma = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$, soit

$$q_{2n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$$

10. On sait que $u_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$. Or, comme $2+\sqrt{3} > 1$, et $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on aura $p_{2n} \sim \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n$, et $q_n \sim \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$. Après une jolie simplification, cela donne $u_{2n} \sim \sqrt{3}$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Comme on sait que la suite (u_n) est convergente, sa limite est nécessairement la même que celle de (u_{2n}), d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.