Mathématiques II : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 mai 2012

Problème 1

I. Étude des fonctions f_n.

1. Les fonctions h_n sont C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivées $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$. Le numérateur étant toujours positif sur $]-1;+\infty[$, les fonction h_n sont toutes strictement croissantes sur cet intervalle.
2. Calculons donc : $h_n(0) = n\ln 1 + 0 = 0$. Les fonctions h_n sont donc négatives sur $]-1;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$.
3. (a) La fonction f_1 est C^∞ sur son ensemble de définition comme produit et composée de fonctions usuelles. Sa dérivée est $f_1'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} = h_1(x)$.
   (b) La fonction f_1 est donc décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Elle admet en 0 un minimum de valeur $f_1(0) = 0$, et a pour limite $+\infty$ en -1 et en $+\infty$.
4. (a) Comme f_1, f_n est C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$.
   (b) Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif et, comme pour f_1, f_n est décroissante puis croissante, atteignant pour minimum 0 en 0, et ayant pour limite $+\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition. Si n est pair, par contre, x^{n-1} change de signe en 0, et $x^{n-1}h_n(x)$ est toujours positif, donc f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, avec pour limite $-\infty$ en -1 et $+\infty$ en $+\infty$.

II. Étude d'une suite.

A. Calcul de U_1.

1. Procédons par identification : $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$, donc on aura égalité si $a = 1$, $a + b = 0$ et $b + c = 0$, soit $a = c = 1$ et $b = -1$, donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
2. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.
3. Par définition, $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Effectuons une intégration par partie en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On obtient $U_1 = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

B. Convergence de la suite (U_n).

1. Pour tout entier naturel n, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n \ln(1+x)$, d'où en intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
2. Comme de plus (U_n) est une suite à valeurs positives (les fonctions f_n prennent toutes des valeurs positives sur $[0;1]$), la suite est décroissante minorée, donc convergente.
3. La positivité de U_n a déjà été justifiée. De plus, sur $[0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant \ln 2$, donc $U_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2 = \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$.
4. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

C. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

1. Inutile de faire une récurrence, il s'agit d'une somme géométrique de raison $-x$, donc $S_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. Intégrons donc l'égalité précédente : par linéarité $\int_0^1 S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. À droite, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.
3. On va effectuer une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = x^n$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$, ce qui donne bien la formule annoncée.

Problème 2

I. Convergence de la suite (u_n).

1. La focntion f étant la composée de l'exponentielle et de la fonction $x \mapsto a(x-1)$, qui sont toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ puisque $a > 0$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n \in [0;1]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque $u_0 = 0 \in [0;1]$ et $u_1 = f(0) = e^{-a} > 0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, alors en exploitant l'hypothèse de récurrence et la croissance de f, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, et $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. La propriété P_{n+1} est bien vérifiée, et la récurrence achevée.
3. La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge.

II. Limite de la suite (u_n) lorsque $a < 1$.

1. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = ae^{a(x-1)} = af(x)$. La fonction f' est donc croissante comme f et, $\forall x \in [0;1]$, $f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$. Comme $f'(0) = ae^{-a} > 0$ et $f'(1) = a$, on a donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant a$ sur $[0;1]$.
2. On a prouvé dans la première partie du problème que $u_n \in [0;1]$, et on vient d'encadrer f' sur cet intervalle, on peut donc appliquer l'IAF entre u_n et 1 pour obtenir, puisque $u_n \leqslant 1$, que $0 \leqslant f(1) - f(u_n) \leqslant a(1-u_n)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, l'encadrement souhaité en découle.

3. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$. Comme $1 - u_0 = 1 = a^0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons maintenant P_n vraie, alors d'après la question précédente $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1 - u_n)$, avec par hypothèse $1 - u_n \leqslant a^n$. On en déduit que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a \times a^n = a^{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence. Si $a < 1$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

III. Limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.

1. (a) Pour cela, introduisons donc la fonction $g : a \mapsto 1 - \dfrac{\ln a}{a}$. Cette fonction g est certainement dérivable sur $[1; +\infty[$, et $g'(a) = -\dfrac{1 - \ln a}{a^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $[1; e]$ et croissante sur $[e; +\infty[$. Elle admet pour minimum sur $[1; +\infty[$ la valeur $g(e) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$. De plus, $g(1) = \lim\limits_{a\to+\infty} g(a) = 1$ (croissance comparée pour cette dernière limite), donc $0 < g(a) \leqslant 1$ sur $[1; +\infty[$.

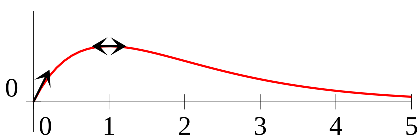
   (b) Nous avons déjà calculé f', résolvons donc l'équation $ae^{a(x-1)} = 1$. Le plus simple est de passer au logarithme (tout est positif) pour obtenir $\ln a + a(x - 1) = 0$, soit $x - 1 = -\dfrac{\ln a}{a}$, donc $x = 1 - \dfrac{\ln a}{a}$.

   (c) On a déjà vu plus haut que la dérivée f' était strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) - 1$, qui est la dérivée de $f(x) - x$, également. Si $a = 1$, la solution obtenue à la question précédente vaut 1, et $f'(x) - 1$ est donc négative sur $] - \infty; 1]$ et positive ensuite. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est donc strictement décroissante sur $] - \infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet pour minimum $f(1) - 1 = 0$.

   Si $a < 1$, c'est très similaire, $x \mapsto f(x) - x$ est décroissante sur $\left]-\infty; 1 - \dfrac{\ln a}{a}\right]$, et croissante sur $\left[1 - \dfrac{\ln a}{a}; +\infty\right[$. On ne cherchera pas à calculer son minimum, ça ne sert à rien !

   (d) Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les valeurs d'annulation de la fonction qu'on vient d'étudier. Si $a = 1$, puisqu'on a un minimum valant 0, 1 est la seule solution de l'équation. Par contre, si $a < 1$, 1 est toujours solution, mais la fonction atteint son minimum avant, et ce minimum est donc strictement négatif. Comme par ailleurs on sait que $f(0) - 0 > 0$ (cf calculs en début de problème) la fonction s'annule une deuxième fois entre 0 et 1. Cette valeur correspond à $r(a)$ (il ne peut pas y avoir d'autres points d'annulation au vu des variations de la fonction), qui vérifie donc $0 < r(a) < 1$.

2. (a) Cette fonction est évidemment dérivable sur $[0; +\infty[$, de dérivée $\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$. La fonction est donc croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ (par croissance comparée). Pour compléter le graphique, on peut ajouter que $\varphi'(0) = 1$, ce qui permet de placer la tangente à la courbe à l'origine. Voici ladite courbe :



   (b) On a $\varphi(a) = ae^{-a}$ et $\varphi(ar(a)) = ar(a)e^{-ar(a)}$. Mais rappelons-nous que, par définition, $f(r(a)) = r(a)$, c'est-à-dire que $e^{a(r(a)-1)} = r(a)$, donc $\varphi(ar(a)) = ae^{ar(a)-a}e^{-ar(a)} =$

$ae^{-a} = \varphi(a)$. Les deux images sont tout simplement égales. Si $a > 1$, on peut en déduire, au vu du tableau de variations de φ, que $ar(a) < 1$ (chaque valeur autre que le maximum est prise exactement deux fois par φ, une fois sur $]0;1[$ et une autre sur $]1;+\infty[$, et on ne peut bien sûr avoir $a = ar(a)$, puisque $r(a) < 1$ par construction si $a > 1$).

(c) La fonction est strictement croissante sur cet intervalle, elle y est certainement bijective. Tout le reste découle du théorème de la bijection : φ^{-1} est continue, strictement croissante, et vérifie $\varphi^{-1}(0) = 0$, et $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = 1$.

(d) On a vu plus haut que $\varphi(ar(a)) = ae^{-a}$. Comme $ar(a) \in [0;1]$, cela équivaut à dire que $ar(a) = \varphi^{-1}(ae^{-a})$, d'où l'égalité demandée. Comme la fonction φ^{-1} est bornée par 0 et 1, on a donc $0 \leqslant r(a) \leqslant \frac{1}{a}$ et, par théorème des gendarmes, $\lim_{a\to+\infty} r(a) = 0$.

3. (a) C'est exactement la même récurrence qu'à la toute première question du sujet : $0 \leqslant u_0 \leqslant r(a)$ est évident, et en supposant $0 \leqslant u_n \leqslant r(a)$, il suffit d'invoquer la croissance de f pour obtenir $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(r(a))$. Comme $r(a)$ est un point fixe de f, cela prouve l'encadrement pour u_{n+1} et achève la récurrence.

(b) On sait déjà que la suite converge vers une limite $L(a)$, et l'encadrement précédent permet d'affirmer que $0 \leqslant L(a) \leqslant r(a)$. Or, la limite de la suite est nécessairement un point fixe de f, et $r(a)$ est le plus petit de ces points fixes. Conclusion : u_n converge nécessairement vers $r(a)$. Autrement dit, $L(a) = r(a)$.

(c) Il y a à peu près douze mille façons d'obtenir ce qui est demandée. Une façon un peu brutale utilisant le fait que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ change pour la première fois de signe en $r(a)$ est de calculer toutes les valeurs de $f(x) - x$ en partant de $x = 0$ et en augmentant à chaque étape x de 0.01, jusqu'à obtenir le changement de signe. Voici un programme convenable :

```
PROGRAM approxra;
USES wincrt;
VAR a,x : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de a');
ReadLn(a);
x := 0;
REPEAT x := x+0.01
UNTIL exp(a*(x-1))-x<0;
WriteLn(x);
END.
```

IV. Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

On sait que la fonction L est constante égale à 1 sur $[0;1]$ (puisqu'on a $L(a) = 1$ si $a \leqslant 1$). On a également vu que $\lim_{a\to+\infty} L(a) = 0$. On a bien sûr toujours $0 \leqslant L(a) \leqslant 1$ puisque $L(a) = r(a)$. On sait également que $ar(a) \leqslant 1$, donc $L(a) = r(a) \leqslant \frac{1}{a}$. On aimerait bien avoir les variations de L pour confimer l'hypothèse raisonnable que la fonction sera décroissante. Pour cela, on peut se battre avec l'expression obtenue à la fin de la question *b*, ou bien être malin : si on prend deux valeurs du paramètre a, qu'on note a_1 et a_2, telles que $a_1 \leqslant a_2$, alors on aura $\forall x \in [0;1]$, $e^{a_1(x-1)} \geqslant e^{a_2(x-1)}$ (puisque $x - 1$ est alors négatif). En notant (v_n) la suite récurrente associée à la valeur a_1 et (w_n) celle associée à a_2, on prouve alors par une récurrence facile que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant w_n$ (en effet, si $v_n \geqslant w_n$, alors $v_{n+1} = e^{a_1(v_n-1)} \geqslant e^{a_1(w_n-1)} \geqslant e^{a_2(w_n-1)} = w_{n+1}$). Par passage à la limite, on aura $L(a_1) \geqslant L(a_2)$, ce qui prouve la décroisance de la fonction L. On peut donc imaginer une allure ressemblant à ceci (on peut calculer la pente de la demi-tangente à la courbe à droite de 1, mais cela dépasse largement nos capacités actuelles) :