Concours Blanc : épreuve de Mathématiques II

ECE3 Lycée Carnot

25e mai 2012

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix à condition d'indiquer clairement dans sa copie les résultats admis. La notation prend en compte la qualité de la rédaction et de la présentation de la copie.

L'utilisation des calculatrices est interdite pour cette épreuve.

Problème 1

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

I. Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

II. Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

A. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.
3. Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.

B. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sans chercher à déterminer sa limite.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$
4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

C. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

1. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$.
3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

Problème 2

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{a(x-1)}$. On définit alors une suite récurrente (u_n) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$.

I. Convergence de la suite (u_n).

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f.
2. Établir par récurrence simultanée les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n). On notera L_a sa limite.

II. Limite de la suite (u_n) lorsque $a < 1$.

1. Déterminer le maximum de la dérivée f' de f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1 - u_n)$.
3. En déduire l'inégalité $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$, puis la limite L_a de la suite (u_n) pour $0 < a < 1$.

III. Limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.

1. On étudie ici les solutions de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.
   (a) Prouver que $0 \leqslant 1 - \dfrac{\ln a}{a} \leqslant 1$ lorsque $a \geqslant 1$.
   (b) Exprimer l'unique solution de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
   (c) En déduire les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
   (d) Préciser dans ces deux cas le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$, et prouver que si $a > 1$, il existe une solution comprise strictement entre 0 et 1.

   On convient désormais de noter r_a la plus petite solution de l'équation $f(x) = x$.
2. On étudie ici r_a lorsque $a \geqslant 1$.
   (a) Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ (on précisera notamment sur la courbe la tangente à l'origine du repère).
   (b) Montrer que $\varphi(a) = \varphi(ar_a)$.
   (c) En déduire que la fonction φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et montrer que la fonction φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$. Dresser le tableau de variation de φ^{-1}.
   (d) Prouver que $r_a = \dfrac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de r_a lorsque a tend vers $+\infty$.
3. On étudie maintenant la limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.
   (a) Établir l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant r_a$.
   (b) En déduire que $L_a = r_a$ lorsque $a \geqslant 1$.
   (c) Écrire un programme Pascal permettant de déterminer une valeur approchée de L_a à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) = 0,20$, $L(4) = 0,02$, etc.

IV. Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L_a$ pour $a > 0$.

Montrer que la fonction $a \mapsto L_a$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et tracer une allure de sa courbe.