Préparation Concours Blanc, Probabilités : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

15 mai 2012

Problème 1

Première partie : calcul matriciel.

1. On calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ puis $M^3 = \begin{pmatrix} 32 & 36 & 24 \\ 24 & 16 & 24 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Ne reste plus qu'à effectuer $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = \begin{pmatrix} 32-40-8+16 & 36-24-12+0 & 24-24-0+0 \\ 24-16-8+0 & 16-32-0+16 & 24-16-8+0 \\ 8-8-0+0 & 12-8-4+0 & 16-24-8+16 \end{pmatrix} = 0$.
2. On peut écrire la relation sous la forme $-\frac{1}{16}M^3+\frac{1}{4}M^2+\frac{1}{4}M = I$, soit $M\left(-\frac{1}{16}M^2+\frac{1}{4}M+\frac{1}{4}I\right) = I$. Cela prouve que la matrice M est inversible, d'inverse $M^{-1} = -\frac{1}{16}M^2 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.
3. En effet, $2^3 - 4\times 2^2 - 4\times 2 + 16 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$. Par identification, on doit avoir $a = 1$, $b-2a = -4$ soit $b = -2$ et $c-2b = -4$, soit $c = -8$, donc $x^3-4x^2-4x+16 = (x-2)(x^2-2x-8)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, il admet deux racines $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$, et $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$. Il y a donc au total trois solutions à l'équation : -2, 2 et 4.
4. En utilisant la question précédente et le résultat de la première question, on a donc $(M-2I)(M^2-2M-8I) = 0$. Si $M-2I$ était inversible, on pourrait multiplier à gauche par son inverse pour obtenir $M^2-2M-8I = 0$. Or ce n'est pas le cas (le premier coefficient en haut à gauche de la matrice $M^2-2M-8I$ vaut -2, donc la matrice n'est pas nulle). La matrice $M-2I$ ne peut donc pas être inversible.
5. Cela revient à résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$. Une résolution particulièrement rapide donne $y = 0$ et $z = -x$. Le système admet donc une infinité de solutions de la forme $(x, 0, -x)$. En particulier, ce n'est pas un système de Cramer et sa matrice associée n'est pas inversible. Comme $MX = 2X$ revient à dire que $(M-2I)X = 0$, cela prouve bien que $M-2I$ n'est pas inversible.
6. Essayons donc d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/12 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice est bien inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

7. Encore du calcul passionnant, mieux vaut commencer par la droite : $MP = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Une petite récurrence pour la route : $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = M^0$, et surtout $PDP^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1} = (PP^{-1})M(PP^{-1}) = M$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, on a alors $M^{n+1} = M^m \times M = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la propriété au rang suivant. Il suffit donc de calculer PD^nP^{-1} : $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$;
puis $PD^n = \begin{pmatrix} 3 \times 4^n & 3 \times (-2)^n & -2^n \\ 2 \times 4^n & -4 \times (-2)^n & 0 \\ 4^n & (-2)^n & 2^n \end{pmatrix}$, et enfin
$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4^n}{2} + (-2)^{n-2} + 2^{n-2} & \frac{4^n}{2} - (-2)^{n-1} & \frac{4^n}{2} + (-2)^{n-2} - 3 \times 2^{n-2} \\ \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{(-2)^{n+1}}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \\ \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^{n-2}}{3} - 2^{n-2} & \frac{4^n}{6} - \frac{(-2)^{n-1}}{3} & \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^{n-2}}{3} + 3 \times 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie : un problème de probabilités.

1. Puisque le préparationnaire a mangé un hamburger au jour 0, l'énoncé nous donne directement $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \dfrac{1}{4}$. Pour le jour 2, il devient nécessaire d'appliquer la formule des

probabilités totales, par exemple $a_2 = P_{A_1}A_2 \times a_1 + P_{B_1}A_2 \times b_1 + P_{C_1}A_2 \times c_1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times 0 + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. De même, $b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; et $c_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

2. Les trois événements formant un système complet, on aura toujours $a_n + b_n + c_n = 1$.
3. On cherche donc à calculer $P_{B_2}(A_1)$, ce qui se calcule bien à l'aide de la formule de Bayes : $P_{B_2}(A_1) = \dfrac{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$.
4. On applique en effet simplement la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements A_n, B_n, C_n, pour obtenir $a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n + 0c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire.
5. Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
6. Il y a une incohérence de notation dans l'énoncé, le U_n dont il est question ici a été noté X_n dans les définitions précédant la première question de la deuxième partie. Nous le noterons U_n pour la suite. La formule se démontre par une récurrence facile : $A^0U_0 = IU_0 = U_0$, et en supposant $U_n = A^nU_0$, alors d'après la question précédente $U_{n+1} = AU_n = A(A^nU_0) = A^{n+1}U_0$.
7. On constate que $A = \frac{1}{4}M$, donc $A^n = \frac{1}{4^n}M^n$, et $U_n = \frac{1}{4^n}M^nU_0 = \frac{1}{4^n}M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de prendre la deuxième colonne de M^n et la diviser par 4^n pour obtenir $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $b_n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; et $c_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
8. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{6}$.
9. Au vu des probabilités calculées dans la première question, $E(X_1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{11}{8}$. Pour $E(X_n)$, on obtient une formule ignoble en utilisant les calculs précédents : $E(X_n) = \frac{3}{2}a_n + 3b_n + 2c_n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{25}{12} - \frac{11}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On a donc une limite égale à $\frac{25}{12}$, soit légèrement supérieure à 2. On peut donc considérer que notre préparationnaire ne mange pas tout à fait équilibré, mais que ça devrait être compensé par un surcroit d'activité cérébrale pour ses révisions de concours blanc.

Problème 2

I. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

1. L'équation $f(x) = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2 + 4pq > 0$ (les réels p et q sont évidemment positifs, ce sont des probabilités !), donc l'équation admet effectivement deux racines, on peut toujours noter r_1 la plus petite et r_2 la plus grande. Comme on doit alors avoir $(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - qx - qp$, on a $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 - qx - qp$, d'où par identification $r_1 + r_2 = q$ et $r_1r_2 = -qp$.
2. Calculons donc : $f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2$; $f(-1) = 1 + q - qp = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2$; et $f(0) = -pq$.
3. Comme $f(0) < 0$ tandis que $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f s'annule sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$. Comme on sait par ailleurs qu'elle s'annule exactement deux fois en r_1 et en r_2, on a donc $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$. En découle que

$|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$. Pour prouver que $|r_1| < |r_2|$, il suffit de constater que ces deux nombres sont de signes opposés mais que leur somme est strictement positive (elle vaut q, on l'a calculée juste au-dessus).

II. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. L'évènement A_1 signifie qu'on tire deux Piles aux deux premiers lancers, donc $a_1 = p^2$. L'évènements A_2 est réalisé si et seulement si on commence avec un Face, puis on poursuit avec deux Piles (si on avait un Pile au premier tirage, la première succession de deux Piles apparaitrait avant les tirages 2 et 3), donc $a_2 = qp^2$. Enfin, pour que A_3 soit vérifié, on peut avoir les successions PFPP et FFPP sur les quatre premiers tirages (Face au deuxième lancer imposé comme ci-dessus, et peu importe ce qui se passe au premier), ce qui donne $a_3 = a_2 = qp^2$.
2. En effet, si on veut que A_{n+2} soit réalisé (pour $n \geqslant 1$), il ne faut pas commencer par deux Piles. Si on commence avec un Face, on peut oublier ce premier tirage et on attend que le premier PP apparaisse sur les $n+1$ tirages restant, ce qui a pour probabilité a_{n+1}. Si on commence avec un Pile, il faut donc un Face au deuxième tirage, et on peut alors oublier ces deux tirages et attendre le premier PP sur les n tirages restants. Ces deux situations étant incompatibles, on aura $a_{n+2} = P(F_1) \times a_{n+1} + P(P_1F_2) \times a_n = qa_{n+1} + pqa_n$. Si $n = 0$, on constate tout simplement que $qa_1 + pqa_0 = qp^2 = a_2$, la formule est donc toujours valable. La relation demandée en découle immédiatement.
3. ```
PROGRAM calculan ;
USES wincrt ;
VAR a,b,t,p : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de p') ;
ReadLn(p) ;
q := 1-p ;
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
IF n=0 THEN WriteLn('a0=0') ELSE
BEGIN
a := p*p ; b := 0 ;
FOR i := 2 To n DO
BEGIN
t := q*b-p*q*a ;
b := a ;
a := b ;
END ;
WriteLn('an=',a) ;
END ;
END.
```
4. La suite $(a_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2, et on a déjà vu plus haut que son équation caractéristique admettait $r_1$ et $r_2$ pour racines. On a donc $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, avec $a_0 = \alpha + \beta = 0$ et $a_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = p^2$, donc $\beta = -\alpha$ et $p^2 = \alpha(r_1 - r_2)$. Cela donne bien $\alpha = \dfrac{p^2}{r_1 - r_2}$ et $\beta = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}$, et la formule demandée. On peut aussi prouver la formule par récurrence...
5. On a vu plus haut que $|r_1| < |r_2|$, donc $r_1^n = o(r_2^n)$, et $a_n \sim \dfrac{p_2 r_2^n}{r_2 - r_1}$ (notez au passage que cette probabilité tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, ce qui n'a rien de surprenant).
```

III. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

1. Calculons donc $AX_n = \begin{pmatrix} (r_1+r_2)a_{n+1} - r_1r_2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. Mais on a vu plus haut que $(r_1+r_2) = q$ et $r_1r_2 = -pq$, donc le premier terme de AX_n vaut $qa_{n+1} + pqa_n$, qui vaut a_{n+2} d'après la question 3.2.2. Finalement, $AX_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.
2. Constatons que $A - r_1I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et que sur cette matrice, $L_1 - r_2L_2$ donne la ligne nulle, ce qui empêche d'inverser la matrice. De même, $A - r_2I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$, et cette fois-ci c'est $L_1 - r_1L_2$ qui s'annule, avec la même conclusion.
3. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P : la combinaison $L_2 \leftarrow L_1 - r_1L_2$ transforme la matrice P en $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$, puis la combinaison $L_1 \leftarrow (r_1 - r_2)L_1 + r_2L_2$ donne la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r_1(r_1 - r_2) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à diviser les lignes respectivement par $r_1(r_1 - r_2)$ et $r_2 - r_1$ pour obtenir l'identité (ça ne pose aucun problème, on sait que tous ces nombres sont non nuls). Les opérations effectuées en parallèle sur l'identité donnent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et enfin $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1-r_2} & \frac{r_2}{r_2-r_1} \\ \frac{1}{r_2-r_1} & \frac{r_1}{r_1-r_2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$.
4. On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1r_2 & 0 \\ 0 & r_1r_2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.
5. Faisons donc, puisqu'on nous le propose si gentiment, une jolie récurrence. Pour $n = 0$, c'est clair : $PD^0P^{-1}X_0 = PP^{-1}X_0 = X_0$. Et si on suppose la relation vérifiée au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = APD^nP^{-1}X_0$, avec $A = PDP^{-1}$ (il suffit de multiplier à gauche par P et à droite par P^{-1} la relation de la question précédente). Donc $X_{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
6. Encore un peu de calcul : $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \\ r_1^n & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & r_2^{n+1}r_1 - r_2r_1^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n & r_1r_2^n - r_2r_1^n \end{pmatrix}$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient finalement $X_n = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} p^2(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) \\ p^2(r_1^n - r_2^n) \end{pmatrix}$. On retrouve bien pour a_n (et accessoirement pour a_{n+1}) la formule trouvée à la question 3.2.4.

IV. Étude du temps d'attente du premier double pile.

1. Calculons donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r_2^n - r_1^n$. Cette somme est bien convergente puisque les raisons des séries géométriques ont une valeur absolue strictement inférieure à 1, et la somme vaut $\dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\dfrac{1}{1 - r_2} - 1 - \dfrac{1}{1 - r_1} - 1\right) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \times \dfrac{r_2 - r_1}{(1 - r_2)(1 - r_1)} = \dfrac{p^2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1r_2} = \dfrac{p^2}{1 - q - pq} = \dfrac{p^2}{p(1 - q)} = \dfrac{p^2}{p^2} = 1$, donc ça marche.
2. Sous réserve de convergence, $E(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)r_2^n - (n+1)r_1^n$. On reconnait des séries géométriques dérivées convergentes (il manque juste le premier terme), et $E(T) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\dfrac{1}{(1 - r_2)^2} - 1 - \dfrac{1}{(1 - r_1)^2} + 1\right) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \times \dfrac{(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2}{p^4}$, en remplaçant $(1 - r_1)(1 - r_2)$ par p^2 au vu du calcul effectué à la question précédente. Le deuxième

numérateur vaut $1-2r_1+r_1^2-1+2r_2-r_2^2=(r_1+r_2)(r_1-r_2)+2(r_2-r_1)=(r_2-r_1)(2-q)=(r_2-r_1)(1+p)$. Après simplification, $E(T)=\dfrac{1+p}{p^2}$.