Préparation Concours Blanc : Probabilités

ECE Lycée Carnot

15 mai 2012

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Première partie : calcul matriciel.

On considère dans cette partie les matrices M et P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On notera par ailleurs I la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = 0$.
2. Déduire de la relation précédente que la matrice M est inversible, et donner son inverse.
3. En constatant que 2 en est une solution, résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.
4. En factorisant la relation obtenue à la question 1, prouver alors que la matrice $M - 2I$ n'est pas inversible.
5. On pose pour cette question $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $MX = 2X$, et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
6. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer son inverse P^{-1}.
7. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, que l'on notera désormais D.
8. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de la matrice M^n.

Deuxième partie : un problème de probabilités.

Un préparationnaire interrompt chaque soir ses révisions de mathématiques pour dîner, et dispose pour cela de trois options : se faire des pâtes, aller prendre un hamburger au fast-food en bas de chez lui, ou réchauffer au micro-ondes un plat préparé. On observe pendant un certain temps les dîners du préparationnaire, et on constate les phénomènes suivants :

- au jour numéroté 0 où l'on débute l'observation, le préparationnaire a mangé un hamburger.
- s'il mange des pâtes au jour n, le préparationnaire mangera à nouveau des pâtes le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$, descendra manger un hamburger sinon (mais ne mangera jamais de plat préparé).
- s'il mange un hamburger au jour n, il aura 3 chances sur 4 de manger des pâtes le lendemain, et une chance sur 4 de se faire un plat préparé.
- s'il mange un plat préparé au jour n, il mangera un hamburger ou à nouveau un plat préparé le lendemain, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque.

On note dans tout le problème et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les évènements suivants :

- A_n : « Le préparationnaire mange des pâtes au jour n ».
- B_n : « Le préparationnaire mange un hamburger au jour n ».
- C_n : « Le préparationnaire mange un plat préparé au jour n ».

On note par ailleurs $a_n = P(A_n)$; $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Quelle relation aura-t-on en général entre a_n, b_n et c_n ?
3. On suppose, pour cette question uniquement, que notre préparationnaire mange à nouveau un hamburger au jour numéro 2. Quelle est alors la probabilité qu'il ait mangé un plat de pâtes au jour 1 ?
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

5. En déduire une matrice A telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
6. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
7. Exprimer A en fonction de la matrice M étudiée dans la première partie du problème, et en déduire les valeurs des probabilités a_n, b_n et c_n.
8. Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.
9. Un plat de pâtes contient environ $1,5$ kilocalories, le hamburger 3 kilocalories, et le plat préparé 2 kilocalories. En notant X_n la variable aléatoire donnant le nombre de kilocalories ingérées par notre préparationnaire lors de son dîner, déterminer $E(X_1)$, puis $E(X_n)$, et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Un repas équililibré étant estimé à environ 2 kilocalories, peut-on considérer que notre préparationnaire a une alimentation équilibrée ?

Problème 2

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n + 1$ ».
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$.

I. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

II. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé.

   ou
   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Écrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réel p et q étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}((r_2)^n - (r_1)^n)$.
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

III. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n tout entier naturel n, par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1I$ et $A - r_2I$ ne sont pas inversibles.
3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de r_1 et r_2 seulement).
5. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
6. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

IV. Étude du temps d'attente du premier double pile.

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n, $P(T=n+1)=a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n+1)=1$.
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T)=\dfrac{1+p}{p^2}$ (c'est-à-dire que la série de terme général $kP(X=k)$ converge vers cette valeur).