Préparation Concours Blanc : Analyse, corrigé

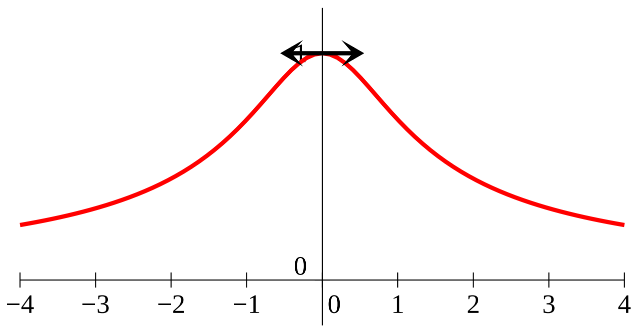
ECE Lycée Carnot

15 mai 2012

Problème 1

I. Étude de f.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve sous la racine est strictement positif) et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$, donc f est paire.
2. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ étant strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, sa composition par la racine carrée (croissante) puis par l'inverse (décroissante) sera une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, f est croissante sur $]-\infty;0]$, et admet pour maximum $f(0)=1$.
3. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. Au vu de ses variations (et de ses limites aux deux infinis, qui sont égales par parité), f est majorée par 1 et minorée par 0.
5. Une allure rapide :



6. Comme f est continue et strictement décroissantes, elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$.
7. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y$, ce qui donne $1+x^2 = \dfrac{1}{y^2}$, soit $x^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Le membre de droite est toujours positif quand $y \in]0;1]$, et on en prend la racine positive puisqu'on veut l'antécédent appartenant à $\mathbb{R}_+$, soit $x = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$.
8. Au vu de la question précédente, f^{-1} est définie sur $]0;1]$ par $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$.

II. Calcul d'aire

1. Le plus simple est de disctinguer deux cas : si $x \geqslant 0$ l'inégalité est évidente ; si $x < 0$, on peut écrire, en multipliant par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$. Comme $x < 0$, le dénominateur est manifestement positif, donc le quotient aussi. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui est dans le ln est toujours strictement positif).

2. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles et $F'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. On calcule, à grands coups de quantité conjuguée, $F(-x) = \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -F(x)$, donc F est bien impaire.

4. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{1+x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Par imparité, on a alors $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

5. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive de f, on a $\mathcal{A}(\lambda) = [F(x)]_\lambda^{2\lambda} = F(2\lambda) - F(\lambda) = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}) - \ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1})$.
   Reste à déterminer la limite, par exemple en regroupant les ln et en factorisant par λ partout : $\mathcal{A}(\lambda) = \ln\dfrac{\lambda(2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}})}{\lambda(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}})} = \ln\dfrac{2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$. Plus de difficulté pour la limite désormais, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln\dfrac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} = \ln 2$.

III. Étude de la suite (u_n).

1. Par calcul immédiat, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = [F(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$.
   Ensuite, $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$, en remarquant que le x du numérateur est à peu de choses près la dérivée de ce qui se trouve dans la racine du dénominateur.

2. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$. On effectue donc une IPP en posant $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ soit $v(x) = \sqrt{1+x^2}$ avec u et v de classe C^1 sur $[0,1]$: $u_3 = [x^2\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\ dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

3. Pour comparer les intégrales u_n et u_{n+1}, on peut commencer par comparer $x^{n+1}f(x) \leqslant x^n f(x)$ sur $[0;1]$. Il ne reste plus qu'à intégrer l'inégalité pour obtenir $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 puisque u_n est une intégrale de fonction positive, donc elle converge.

5. On a vu dans la première partie du problème que f était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}_+$, donc a fortiori sur $[0;1]$. Il suffit alors de multiplier par x^n, qui est bien positif, pour obtenir le premier encadrement. On peut alors l'intégrer, ce qui donne $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

6. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, une petite application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Problème 2

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geqslant 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \dfrac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \dfrac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant intervenir des puissances de A supérieurs ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

(b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

(c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t))$, donc $E(t)^n = I + ntA + \frac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Pas faisable à notre niveau, cf question suivante.
2. Pour trouver une matrice Q vérifiant $BQ = QD$, on peut en fait procéder par colonnes. La première colonne de Q, qu'on pourra noter $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, doit vérifier $BX = X$ (en effet, multiplier Q à droite par D ne change pas sa première colonne). L'équation $BX = X$ se traduit par le système suivant : $\begin{cases} \quad - z = x \\ 2x + 3z = z \end{cases}$, système qui n'est pas de Cramer et a pour solution tous les couples $\{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De même en posant pour la deuxième colonne $Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, on se ramène à l'équation $BY = 2Y$, soit au système $\begin{cases} \quad - t = 2y \\ 2y + 3t = 2t \end{cases}$, qui n'est pas de Cramer non plus et admet pour solutions les couples $\{(y; -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. En posant par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on aura $BQ = QD$, donc $Q^{-1}BQ = D$ en supposant Q inversible. Elle l'est effectivement : le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n - 2 + 3 - 3 \times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2 - 2^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.
4. Par définition, $a_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$, d'où la formule annoncée. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$.
5. On reconnait dans les sommes précédentes des sommes partielles de séries exponentielles, qui convergent donc, et on calcule sans difficulté (en séparant en deux la somme à chaque fois) les limites : $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; $\lim_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\lim_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.
6. (a) De qui se moque-t-on dans cet énoncé ? On vient de le faire à la question précédente !

   (b) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.

(d) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^t E_1 + e^{2t} E_2)(e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) = e^t e^{-t} E_1^2 + e^{2t} e^{-2t} E_2 = E_1 + E_2 = I$ (les simplifications utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.