Préparation Concours Blanc : Analyse

ECE Lycée Carnot

15 mai 2012

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
6. Montrer que f rélaise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unqiue réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}

II. Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\, dx$$

1. Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

   En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III. Etude de la suite (u_n) .

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégrationpar parties et calculer u_3.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) ..
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :

   $$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$$

   en déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

Problème 2

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad A^n = 0$$
   où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que :
$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$$
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n nonnul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \quad \text{que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice Q d'ordre 2, inversible telle que
$$Q^{-1}BQ = D$$

3. Pour tout entier naturel n, montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.

5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, on pose alors :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

   (b) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

   (c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.

   (d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.