Concours Blanc n°1

ECE3 Lycée Carnot

5 janvier 2012

Exercice 1

1. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

   (b) On désigne par S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   Montrer que $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   En déduire que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

2. On considère la série $\sum v_n$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

   On désigne par T_n la somme partielle d'ordre n de cette série : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, $T_{n+1} - 1 \leqslant S_n$.

   (b) Déduire de ce qui précède que la série $\sum v_n$ converge. On notera T sa somme.

3. Dans cette partie, on se propose de montrer que, pour tout entier n, $n > 1$, $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$.

   (a) On pose, pour $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{3n}{2n+1}$.

   Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $b_n - b_{n-1} < v_n$.

   (b) Montrer que, pour tout $n > 1$, $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que $\dfrac{3}{2} \leqslant T \leqslant 2$.

Exercice 2

On s'intéresse aux mots (concaténation de lettres) qu'il est possible de former avec l'alphabet $\{a, b, c\}$ et obéissant aux contraintes suivantes :

- le mot est de longueur n (il contient n lettres) ;
- il commence et finit par la lettre a ;
- deux lettres adjacentes sont toujours différentes.

Un tel mot sera dit *terne*.

On désigne par t_n le nombre de mots ternes de longueur n.

1. Déterminer tous les mots ternes pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6.
2. Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 3$, $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$.
   (Il est demandé une justification soignée de cette relation.)
3. Exprimer t_n en fonction de n.

Problème

On note dans tout ce problème (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 1$. On définit une seconde suite (u_n) à partir de (a_n) de la façon suivante :

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 (on donnera les résultats sous forme d'un quotient d'entiers).
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.
3. On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$, de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_n)$. Étudier les variations de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Prouver que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$; et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.
6. Prouver que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, et en déduire la nature de (u_n).

Étude de deux suites auxiliaires

On définit désormais deux nouvelles suites (p_n) et (q_n) en posant $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ et $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$.

1. Démontrer que tous les termes de ces deux suites sont des entiers naturels.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.
3. Montrer par récurrence que, $\forall x > 0$,
   $\forall n \geqslant 2$, $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x}}}} = \dfrac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}}$. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$.
5. Montrer à l'aide des résultats précédents que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.
6. En considérant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, redémontrer la convergence de la suite (u_n).
7. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = p_{2n}$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n$.
8. En déduire l'expression de p_{2n} en fonction de n.
9. Déterminer de même l'expression de q_{2n} en fonction de n.
10. À l'aide des résultats précédents, retrouver la limite de la suite (u_n).