Chapitre 22 : Variables aléatoires infinies

ECE3 Lycée Carnot

4 mai 2011

Introduction

Ce chapitre est destiné à généraliser les résultats obtenus sur les variables aléatoires au cas où celles-ci prennent une infinité de valeurs. Un exemple extrêmement classique : on lance une pièce jusqu'à obtenir Pile et on note X le nombre d'essais nécessaires. La variable X peut prendre comme valeur n'importe quel entier, et il se peut même que X ne prenne pas de valeur du tout (si on ne tombe jamais sur Pile, événement possible bien que de probabilité nulle) ! En fait, les définitions vues pour les variables finies ne vont être que très légèrement modifiées. La principale différence proviendra lors du calcul des paramètres comme l'espérance, qui feront intervenir non plus une somme finie, mais une série.

1 Compléments de probabilités

Définition 1. Soit (A_n) une suite d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la suite est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, et **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Proposition 1. Théorème de la limite monotone.

Pour toute suite croissante d'événements (A_n), on a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Pour toute suite décroissante d'événements (A_n), on a $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exemple : Un singe immortel tape tous les jours 100 000 caractères de façon complètement aléatoire sur un clavier de 50 touches. On cherche la probabilité que ce singe tape un jour donné l'intégralité des *Misérables* sans une seule faute de frappe, sachant que ce livre fait exactement 100 000 caractères (ce n'est sûrement pas vrai mais peu importe). Notons A_n l'évènement « Le singe n'a pas réussi à taper entièrement le livre avant le jour n ». La suite d'évènements (A_n) est décroissante (si le singe n'a pas réussi avant le jour $n+1$, c'est qu'il n'avait pas réussi avant le jour n), et, en notant $p = \dfrac{1}{50^{1\ 000}}$ (probabilité que notre singe tape son livre un jour donné), $P(A_n) = (1-p)^n$. Par théorème de la limite monotone, $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ puisque $p > 0$, donc $1 - p < 1$. Il y a donc une probabilité nulle que le singe n'arrive jamais à taper *Les Misérables*. Autrement dit, le singe arrivera à taper le livre avec probabilité 1 (il faudra juste attendre très très longtemps).

Définition 2. Un événement est **négligeable** si sa probabilité est nulle. Un évènement est **presque sûr** si sa probabilité vaut 1.

Remarque 1. Un événement peut très bien être presque sûr sans être l'événement certain. Prenons l'exemple d'une infinité de Pile ou Face ; l'événement A : « on tire au moins un Pile » n'est pas l'événement certain (il existe exactement un élément de Ω, celui composé d'une infinité de Face, qui n'appartient pas à A), mais est presque sûr. Pire, l'exemple de la section précédente nous donnait un événement presque sûr, alors qu'il existe une infinité de possibilités qui ne sont pas dans A !

2 Variables infinies

2.1 Définition, opérations

Définition 3. Une **variable aléatoire infinie** (discrète) X sur un espace probabilisé Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ définie sur un ensemble presque sûr.

Remarque 2. On peut en fait définir sans difficulté supplémentaire des variables aléatoires prenant une infinité de valeurs qui ne sont pas nécessairement entières, tant que celles-ci peuvent être mises sous forme d'une suite de réels.

Exemple 1 : On effectue une suite de lancers de dé, et on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier 6.

Exemple 2 : Une urne contient une boule blanche, une noire et une verte. On tire dans l'urne avec remise jusqu'à tirer pour la deuxième fois la boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaires. On a ici $X(\Omega) = \{2; 3; \dots\}$.

Remarque 3. On continuera naturellement à utiliser les notations $X = i$ ou $X \geqslant i$ pour les mêmes événements que dans le cas fini.

Proposition 2. Soient X et Y deux variables infinies sur un même univers Ω, alors $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.

Proposition 3. Soit X une variable aléatoire infinie sur Ω et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

2.2 Loi

Définition 4. Soit X une variable aléatoire infinie, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs de k appartenant à $X(\Omega)$.

Remarque 4. Il n'est évidemment plus possible de présenter la loi d'une variable infinie sous la forme d'un tableau. On devra se contenter d'une formule.

Exemple 1 : On calcule sans difficulté $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

Exemple 2 : Pour les trois boules dans l'urne, on aura $X = k$ si on tire une boule blanche au tirage k (probabilité $\frac{1}{3}$) et exactement une boule blanche sur les $k-1$ premiers tirages, ce qui a pour probabilité (en tenant compte du choix de la position de la première boule blanche) $(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$, donc $P(X = k) = (k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$.

Proposition 4. On a toujours $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Exemple 1 : Un peu de révision sur les séries : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$.

Exemple 2 : C'est une série géométrique dérivée qui va être utile cette fois-ci. En effet, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{9} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} = 1$.

2.3 Fonction de répartition

Définition 5. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est toujours la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Proposition 5. Les propriétés vues dans le cas d'une variable aléatoire finie restent toutes valables. La seule différence est que la courbe représentative de F_X n'est plus en escalier (car il y a une infinité de « marches »).

2.4 Moments d'une variable aléatoire infinie

Définition 6. On dit que la variable infinie X **admet une espérance** si la série de terme général $kP(X = k)$ est absolument convergente. L'**espérance** de X est alors la somme de la série : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$.

Exemple 1 : On verra dans le paragraphe consacré aux lois géométriques que l'espérance du nombre de lancers effectués vaut 6.
Exemple 2 : Ici, pas de loi usuelle, il faut faire le calcul, qui fait intervenir une série géométrique dérivée seconde : $E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{9} \times 54 = 6$.

Proposition 6. Si X et Y sont deux variables aléatoires infinies admettant une espérance et définies sur le même univers Ω, $X + Y$ admet aussi une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Proposition 7. Si X est une variable aléatoire positive et qu'elle admet une espérance, on a $E(X) \geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 1. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors si $g(X)$ admet une espérance, $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$.

Définition 7. Soit X une variable aléatoire et r un entier positif, X admet un **moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note toujours $m_r(X) = E(X^r)$.

Définition 8. La variable aléatoire infinie X **admet une variance** si elle admet une espérance m et si la variable $(X - m)^2$ admet une espérance. On a alors $V(X) = E((X - m)^2)$.

Théorème 2. La variable X admet une variance si et seulement si X et X^2 admettent une espérance et la formule de König-Huygens reste valable.

3 Lois usuelles infinies

3.1 Loi géométrique

Définition 9. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in [0; 1]$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On le note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple : Vous aurez reconnu la loi apparaissant dans notre exemple des lancers de dé. Les cas de la position d'apparition du premier Pile dans une série de Pile ou Face serait également une variable géométrique. En général, le temps d'attente d'un évènement lors d'un processus sans mémoire (c'est-à-dire que l'apparition de l'évènement au n-ième tirage ne dépend pas des résultats des tirages précédents) suit toujours une loi géométrique.

Proposition 8. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Démonstration. La série pour l'espérance est (à un facteur près) une série geométrique dérivée, elle est donc convergente, et $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} pk(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$. On a donc $E(X)^2 = \frac{1}{p^2}$. De plus, $X(X-1)$ admet une espérance (on a une série de type géométrique dérivée seconde) qui vaut $E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} pk(k-1)(1-p)^{k-1} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$, donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$. □

Proposition 9. La loi géométrique est une loi sans mémoire : si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $P_{X>n}(X > n+m) = P(X > m)$.

Démonstration. Commençons par calculer $P(X > m) = \sum_{k>m} P(X = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+m} = pq^m \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\frac{q^m}{1-q} = q^m$. De même, on a donc $P(X > n) = q^n$ et $P(X > n+m) = q^{n+m}$, donc $P_{X>n}(X > n+m) = \frac{P(X > n+m)}{P(X > n)} = q^m$, ce qui prouve bien l'égalité demandée. □

3.2 Loi de Poisson

Définition 10. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda \in \mathbb{R}_+$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 5. D'après les résultats vus au chapitre précédent sur la série exponentielle, la somme de ces probabilités vaut bien 1. Par ailleurs, la suite $P(X = k)$ converge très vite vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Exemple : La loi de Poisson sert en fait de modélisation à beaucoup de situation concrètes. Elle est par exemple utilisée pour le nombre d'appels reçus (en un temps donné) par un standard téléphonique. On l'appelle parfois également loi des événements rares.

Proposition 10. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, X admet une espérance et une variance, et $E(X) = V(X) = \lambda$.

Démonstration. $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$, et de même $E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$. On a donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. □

Remarque 6. Mais d'où vient donc cette envie de modéliser certains phénomènes par une loi faisant intervenir des exponentielles et des factorielles qui semblent tout droit sorties du chapeau d'un mathématicien fou ? En fait, il existe une façon presque simple de voir les choses : la loi de Poisson représente une sorte de limite de lois binômiales d'espérance constante, mais pour lesquelles on augmente la valeur du paramètre n (et on diminue donc proportionnellement la valeur de p), comme l'explique le résultat suivant :

Proposition 11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et (X_n) une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Démonstration. C'est un calcul de limite un peu laborieux mais assez joli. Fixons donc un entier $k \in \mathbb{N}$; si $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, on aura donc (pour $n \geqslant k$, puisqu'avant les probabilités seront nulles) $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$. Cherchons des équivalents de tout ce qui apparait dans ce produit. Pour le terme du milieu, $\frac{\lambda^k}{n^k}$, on ne touche à rien. Pour celui de gauche, on « développe » le coefficient binômial, ce qui donne $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$. Le numérateur de cette fraction est un polynôme (en la variable n, bien entendu, puisque k est fixé pour tout ce calcul) de degré n, et de coefficient dominant n^k. Il est donc équivalent à n^k, et $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$. Enfin, pour le dernier terme, on passe par la forme exponentielle : $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$, on a $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda}{n}$, donc $(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim \frac{n-k}{n}(-\lambda) \underset{n\to+\infty}{\to} -\lambda$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = e^{-\lambda}$, puis en recollant les morceaux $P(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, ce qui achève la démonstration. □