

Problème ESSEC II 2002 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

29 mars 2011

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\frac{1}{2} < x_1 < 1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0; 1[$.
- (b) Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a $\frac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$. Comme $\frac{2}{3} < 1$, on a a fortiori $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$.
- (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{4}{9}$, soit $\frac{1}{2} \leq |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
- (d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$: $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, on a d'après la question b $\frac{1}{2} \leq f(u_n) \leq 1$, soit $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui achève la récurrence. Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2 + 1) = 1$, donc $r_2 = \frac{1}{r_2 + 1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$. On peut désormais appliquer l'IAF à $x = u_n$ et $y = r_2$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n) - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$. Montrons enfin par récurrence la propriété $P_n : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leq 1$ car $r_2 \in]0; 1[$, ce qui prouve P_0 . Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leq \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence. Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = r_2$.
2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynôme $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée est $3x^2 + 2x + 1$, qui a un discriminant négatif et est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et

bijjective sur \mathbb{R} . Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1 . L'équation proposée a donc une unique solution (à cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0; 1[$.

- (b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur \mathbb{R}_+ , on aura, si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$, donc l'intervalle est stable.

- (c) La fonction g est C^∞ sur \mathbb{R} (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3} \\ &= \frac{8x^2 + 8x + 2 - 2x^2 - 2x - 2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1\right)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$ et $g'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$, $|g'(x)| \leq \frac{135}{169}$.

- (d) On aimerait appliquer l'IAF à $x = r_3$ et $y = v_n$ en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précédente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question 1.d; et que $r_3 \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ et est un point fixe de g . Comme $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_2 \geq \frac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f . On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leq \frac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leq \frac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.d, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\frac{1}{3} \leq r_3 \leq 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\frac{4}{9}$ par des $\frac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\frac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0 , et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur \mathbb{R}_+ , de dérivée $h'_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$. La fonction h_n étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0; +\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0; 1[$ et $t_n \in]0; 1[$.
- (b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \dots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \dots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
- (c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1}

étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

- (d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geq n, 0 < t_n \leq t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leq t_A^n$. Fixons donc $A \geq a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n^n = 0$.
- (e) En reprenant la relation obtenue à la question *b* et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{a}{a+1}$.
4. (a) Tout comme pour la fonction h_n , i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur \mathbb{R}_+ , donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur \mathbb{R}_+ . De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 - a = \frac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0; 1[$.

(b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1) \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = (n-1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 2x^2 - 2nx^{n+1} + x + 2x^2 - a(x-1)^2 = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

- (c) Même chose qu'à la question 3.c en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1} , $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.
- (d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question *b*, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n + a(y_n - 1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta - 1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \frac{1+2a + \sqrt{1+4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \frac{1+2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$. reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leq \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \frac{1+2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$.