

Problème de révision : ESSEC II 2002

ECE3 Lycée Carnot

29 mars 2011

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \dots + x = a$.

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0; 1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2 .
- (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
- (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n) .

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

- (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0; 1[$.
- (b) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ est stable par g .
- (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.
- (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n , et prouver la convergence de (v_n) vers r_3 .

3. Racine positive de l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$.

On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geq 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - a$.

- (a) Montrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n , puis que $t_n \in]0; 1[$ si $n > a$.
- (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
- (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α .
- (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leq t_A^n$ si $n \geq A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n^n = 0$.
- (e) Exprimer la limite α en fonction de a .

4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 2x^2 + x - a = 0$.

On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 2x^2 + x - a$.

- (a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0; 1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n .
- (b) Prouver la relation $(x-1)^2 g_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.
- (c) Montrer que $g_{n+1}(y_n) > g_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n) , et sa convergence vers un réel $\beta \in [0; 1[$.
- (d) Montrer que $0 \leq ny_n^n \leq ny_A^n$ dès que $n \geq A$, où $A(A+1) \geq 2a$. En déduire la limite de la suite (ny_n^n) , puis déterminer β en fonction de a .