Feuille d'exercices de révision n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

8 février 2011

Problème 1

Première partie

1. On a $a_3 = \dfrac{1}{8}$ (un seul tirage gagnant sur les 8 possibles : PPF). Pour que A_4 se réalise, il faut que les trois derniers tirages soient PPF, mais le premier tirage ne peut être Face, sinon le joueur B aurait gagné au troisième tour. Il ne reste donc que la possibilité $PPPF$, soit $a_4 = \dfrac{1}{16}$.
2. Dans le cas général, il faut toujours finir par PPF, et on ne peut pas avoir de Face précédant ces deux Pile sinon le joueur B aurait gagné à un des tirages précédents. Il n'y a donc que le tirage $P \dots PPF$ qui fasse gagner le joueur A, soit une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$.
3. Il suffit d'additionner les probabilités de tous les événements A_n : $P(A) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.
4. La probabilité d'un match nul étant nulle, il reste une probabilité $\dfrac{3}{4}$ que ce soit B qui gagne. Conclusion, il vaut largement mieux être dans la peau du joueur B (bien qu'on puisse penser au premier abord que PPF et FPP sont plus ou moins équivalents).

Deuxième partie

1. On a clairement $d_1 = 1$ puisqu'on ne risque pas d'obtenir deux Pile de suite après un seul tirage. Après deux tirages, une seule possibilité sur les quatre amène une succesion de deux Pile, donc $d_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Enfin, après trois tirages, trois possibilités sur 8 vont donner deux Pile (ce sont les tirages PPP, PPF et FPP), donc $d_3 = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$.
2. Les événements F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements (ils sont disjoints et on est bien obligé de commencer par F, par PF ou par PP), donc $D_{n+2} = D_{n+2} \cap F_1 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap P_2$. Or, ce dernier ensemble est vide puisque $P_1 \cap P_2$ est incompatible avec D_{n+2} par définition. Il ne reste donc que l'union de deux ensembles annoncée. Or, $P(D_{n+2} \cap F_1) = \dfrac{1}{2} d_{n+1}$ (probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'avoir Face au départ et ensuite il ne faut pas avoir Pile sur les $n+1$ lancers restants) et de même $P(D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{4} d_n$, d'où la formule de récurrence.
3. On a bien $d_1 = 1 \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^0$ et $d_2 = \dfrac{3}{4} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^1$. Supposons que $d_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ et $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$, on a alors d'après la question précédente $d_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{4}\right)$.

Or, $\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}+\frac{1}{4}=\frac{6}{14}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}=\frac{133}{196}$ et $\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{36}{49}=\frac{144}{196}$. On a donc $d_{n+2}\leqslant\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}=\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

4. La série a un terme général positif, et ses sommes partielles sont majorées par $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$, qui converge (c'est une série géométrique) vers $\frac{1}{1-\frac{6}{7}}=7$. On en déduit la convergence de la série de terme général d_k, et de plus $\sum_{k=1}^{+\infty}d_k\leqslant 7$.

5. En sommant la relation de récurrence entre $k=1$ et $k=n$, on obtient $\sum_{k=1}^{n}d_{k+2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}d_{k+1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}d_k$, soit après changement d'indices $\sum_{k=3}^{n+2}d_k=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}d_k+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}d_k$. Attention, il manque des termes aux deux premières sommes pour faire apparaitre S_{n+2} et S_{n+1}. On a plus précisément $S_{n+2}-d_1-d_2=\frac{1}{2}(S_{n+1}-d_1)+\frac{1}{4}S_n$, soit $S_{n+2}-1-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}S_{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S_n$, donc $S_{n+2}=\frac{1}{2}S_{n+1}+\frac{1}{4}S_n+\frac{5}{4}$. Comme la série converge, les trois suites S_n, S_{n+1} et S_{n+2} convergent vers la même limite S (somme de la série), donc en passant à la limite $S=\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S+\frac{5}{4}$, donc $\frac{1}{4}S=\frac{5}{4}$. On obtient bien $\sum_{k=1}^{+\infty}d_k=5$.

Supplément pour les plus masochistes

Voici la correction des deux questions supplémentaires traitées en TD : le calcul d'une formule explicite pour d_n à l'aide de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2, puis celui de la somme de la série à partir de cette formule explicite.

- L'équation caractéristique de notre récurrence linéaire est $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$, ce qui donne $\Delta=\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, puis $r=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et de même $s=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On a donc $d_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n+\beta\left(\frac{16\sqrt{5}}{4}\right)^n$, avec α et β vérifiant le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} d_1 & = & 1 & = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \\ d_2 & = & \frac{3}{4} & = & \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 4 & = & \alpha(1+\sqrt{5})+\beta(1-\sqrt{5}) \\ 12 & = & \alpha(1+\sqrt{5})^2+\beta(1-\sqrt{5})^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 4 & = & \alpha+\alpha\sqrt{5}+\beta-\beta\sqrt{5} \\ 12 & = & \alpha+2\sqrt{5}\alpha+5\alpha+\beta-2\sqrt{5}\beta+5\beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 4 & = & (\alpha+\beta)+\sqrt{5}(\alpha-\beta) \\ 12 & = & 6(\alpha+\beta)+2\sqrt{5}(\alpha-\beta) \end{array}\right.$$

En faisant les combinaisons $6L_1-L_2$ et L_2-2L_1, on obtient les nouvelles équations :

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 12 & = & 4\sqrt{5}(\alpha-\beta) \\ 4 & = & 4(\alpha+\beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{3}{\sqrt{5}} & = & \alpha - \beta \\ 1 & = & \alpha + \beta \end{array} \right.$$

L'addition des deux lignes donne alors $2\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + 1$, soit $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, et leur soustraction amène $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$. Finalement, $d_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

- La série de terme général d_n est donc une somme de deux séries géométriques convergentes, il faut juste faire attention au fait qu'on va faire commencer la sommation à $n = 1$, il ne faut donc pas oublier de soustraire le terme 0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - 1\right) + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}} - 1\right)$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}} - 1\right) + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{4}{3+\sqrt{5}} - 1\right)$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{3+3\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{6\sqrt{5}-10} + \frac{\sqrt{5}-5-3+3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}+10}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} + \frac{2\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}+5}$$
$$= \frac{(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}+5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2} + \frac{(2\sqrt{5}-4)(3\sqrt{5}-5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2}$$
$$= \frac{12\sqrt{5}+20+30+10\sqrt{5}+30-10\sqrt{5}-12\sqrt{5}+20}{45-25}$$
$$= \frac{100}{20} = 5.$$

Ouf, on retrouve le résultat précédent.

Troisième partie

1. On a bien sûr $P(T_1) = P(T_2) = 0$, puisqu'il faut attendre au moins trois tirages pour que PPF ou FPP apparaisse. Quand à T_3, il est réalisé si un de ces tirages apparait, soit $P(T_3) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
2. Remarquons que si une série d'au moins deux Pile apparait, elle verra la victoire d'un des joueurs dès qu'elle est interrompue par un Face, que ce soit à sa gauche ou à sa droite. Pour qu'aucun joueur ne gagne, il faut donc, soit qu'il n'y ait pas de série de deux Piles (probabilité d_n), soit qu'il n'y ait que des Pile (probabilité $\dfrac{1}{2^n}$), d'où la formule.
3. On a $C_{n-1} = C_n \cup T_n$ (si personne n'a gagné après $n-1$ tirages, soit quelqu'un gagne juste après, soit non), et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(C_{n-1}) = P(C_n) + P(T_n)$ et $P(T_n) = P(C_{n-1}) - P(C_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \dfrac{1}{2^n} - d_n = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. On a donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} P(T_k) = d_2 - d_n + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^k}$ (il y a un télescopage sur les d_k). Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ (puisque la série de terme général d_n converge) et comme la série de terme général $\dfrac{1}{2^k}$ converge (série géométrique), cette sommé partielle a une limite, qui vaut $d_2 + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} + 2 - \dfrac{7}{4} = 1$ (il manque les premiers termes de la somme de droite). Cette somme représente

la probabilité qu'un des deux joueurs gagne. Il reste donc une probabilité nulle qu'il y ait match nul.

Problème 2

Première partie

1. C'est un calcul qu'on a déjà fait dans un ou deux exercices (J étant la matrice ne contenant que des 1), et on obtient encore une fois $J^2 = 3J$.
2. C'est vrai pour $n = 0$ (en posant $u_0 = 0$, on a bien $M^0 = I + 0 \times J$) ou si on préfère pour $n = 1$ en posant $u_1 = 1$ puisque par définition $M = I + J$. Supposons donc le résultat vérifié au rang n, on a donc $M^n = I + u_n J$, d'où $M^{n+1} = M \times M^n = M(I + u_n J) = (I + J)(I + u_n J) = I + u_n J + J + u_n J^2 = I + (u_n + 1 + 3u_n)J = I + (1 + 4u_n)J$ (on a utilisé le résultar de la première question), ce qui achève la récurrence et prouve en passant que $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
3. On reconnait comme souvent une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = 4x + 1$ donne $x = -\dfrac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{1}{3} = 4u_n + 1 + \dfrac{1}{3} = 4\left(u_n + \dfrac{1}{3}\right) = 4v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$. On a donc $v_n = \dfrac{4^n}{3}$, et $u_n = \dfrac{4^n - 1}{3}$. On a alors $M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

1. (a) Les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$. Les probabilités conditionnelles nous ayant été données par l'énoncé, on obtient sans problème $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$. De même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$. On a donc bien la relation annoncée en posant $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (b) On a $U = \dfrac{1}{4}M$, donc $U^n = \dfrac{1}{4^n}M^n$ (non, je ne recopierai pas la matrice, ça n'a aucun intérêt).
2. Prouvons donc par récurrence que $X_n = U^n X_0$ (je vous rappelle qu'il faut rédiger cette récurrence). C'est évidemment vrai pour $n = 0$, et en le supposant vérifié au rang n, on aura $X_{n+1} = UX_n = U(U^n X_0) = U^{n+1}X_0$, donc ça marche. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, X_n sera en fait identique à la dernière colonne de la matrice U^n, c'est-à-dire que $a_n = b_n = \dfrac{1}{3 \times 4^n}(4^n - 1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3 \times 4^n}$, et $c_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3 \times 4^n}$. Tout cela converge tranquillement vers $\dfrac{1}{3}$.