Feuille d'exercices de révision n°4

ECE3 Lycée Carnot

28 janvier 2011

Problème 1

On considère une suite infinie de lancers de pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_n et F_n les événements : « On obtient Pile (respectivement Face) au n-ème lancer ».

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : A gagne si la séquence PPF apparait avant la séquence FPP lors de cette suite de tirages ; B gagne si la séquence FPP apparait avant la séquence PPF (si aucune des deux séquences n'apparait dans la suite de tirages, il y a match nul).

Première partie

On note A_n l'événement « Le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer (et personne ne gagne avant) » et a_n sa probabilité. De même, on note B_n et b_n pour le cas où c'est le joueur B qui gagne après le $n$ème lancer.

1. Calculez a_3 et a_4.
2. Dans le cas général ($n \geqslant 3$), explicitez tous les tirages pour lesquels A gagne au $n$ème lancer (il n'y en a pas beaucoup ...). En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire la probabilité de l'événement A : « Le joueur A gagne la partie ».
4. On admet que la probabilité que personne ne gagne est nulle (cf troisième partie). Quelle est la probabilité que B gagne ? Conclusion ?

Deuxième partie

On note dans cette partie D_n l'événement « On n'obtient jamais deux Piles consécutifs lors des n premiers lancers » et d_n sa probabilité.

1. Calculez d_1, d_2 et d_3 (pour d_3, un bête dénombrement suffira).
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \cup (D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2)$, et en déduire que $d_{n+2} = \dfrac{1}{2} d_{n+1} + \dfrac{1}{4} d_n$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ (on pourra faire une récurrence double et utiliser la relation précédente).
4. En déduire que la série de terme général d_n converge et une majoration de sa somme.
5. Montrez que, si on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$, on a $S_{n+2} = \dfrac{1}{2} S_{n+1} + \dfrac{1}{4} S_n + \dfrac{5}{4}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Troisième partie

On note C_n l'événement « Aucun des deux deux joueurs n'a gagné à l'issue du n-ème lancer » et T_n l'événement « Un des deux joueurs gagne à l'issue du $n$ème lancer (mais personne n'avait gagné avant) ».

1. Calculez les probabilités des événements T_1, T_2 et T_3.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $P(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_n$.
3. En déduire l'égalité $P(T_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. Montrez que la série de terme général $P(T_n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que l'événement « Aucun des deux joueurs ne gagne » est de probabilité nulle.

Problème 2

Première partie

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de taille 3. On pose $J = M - I$.

1. Calculer J^2 en fonction de J.
2. Montrer par récurrence qu'il existe une suite (u_n) de réels telle que pour tout entier naturel n on ait $M^n = I + u_n J$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer la valeur de u_n puis l'expression de la matrice M^n.

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C.

- Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/2$, $1/4$ et $1/4$.
- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/2$ et $1/4$.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/4$ et $1/2$.
- Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n, b_n et $c_n$les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.

   (b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.
2. On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des question précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.