# Feuille d'exercices de révision n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

12 octobre 2010

## Exercice 1

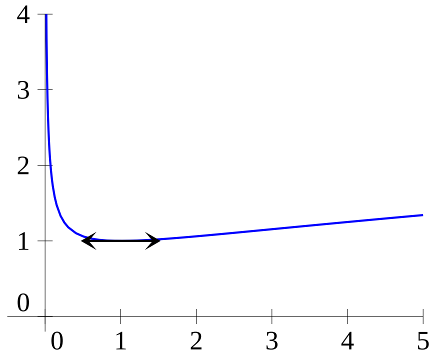
1. La suite étant définie dès que $u_n \neq -1$, prouver par récurrence que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ suffit. C'est vrai pour $u_0$, et si on le suppose vrai pour $u_n$, alors $\frac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$, donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{2}{3}$. Or $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2 - 2}{u_n + 1} = 2 - \frac{2}{u_n+1}$. On a donc $\frac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$, qui est positif en utilisant ce qui précède. La suite est donc croissante.
3. On obtient $x^2 + x = 2x$, soit $x(x-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. La suite $(u_n)$ a en fait pour limite 1.

## Exercice 2

1. En effet $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+k} \leqslant \frac{1}{k^2}$, puisque $k^2 \leqslant k^2 + k$. L'autre inégalité est similaire.
2. C'est une somme télescopique, qui vaut $1 - \frac{1}{n}$. En faisant la somme des inéagalités obtenues à la question précédente, on obtient donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$
3. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
4. Toujours avec l'encadrement de la deuxième question, on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{1001} \leqslant S_{1000} \leqslant 1 - \frac{1}{1000}$. Ces encadrements ne sont en fait pas très intéressants (en gros, ils nous disent que la suite $(S_n)$ va prendre ses valeurs entre $\frac{1}{2}$ et 1) mais permettent de prouver la convergence de la suite $(S_n)$.

## Exercice 3

1. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{2x - (1+x)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$. La fonction est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$ et sa courbe ressemble à ceci :




2. Calculons $f(x) - x = \dfrac{1 + x - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui est du signe de $1 + x - 2x\sqrt{x}$. Notons $X = \sqrt{x}$, on a alors $1 + x - 2x\sqrt{x} = 1 + X^2 - 2X^3 = (1 - X)(1 + X + 2X^2)$. La deuxième parenthèse est toujours positive sur $\mathcal{D}_f$, la position relative dépend du signe de $1 - \sqrt{x}$, qui est positif quand $x \leqslant 1$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]0; 1]$ et en-dessous ensuite.
3. La suite est bien définie si toutes les valeurs de la suite sont strictement positives, donc il est largement suffisant de prouver que $u_n \geqslant 1$. Pour une fois, même pas besoin de récurrence, puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 1$ puisque la fonction $f$ ne prend pas de valeurs plus petites que 1.
4. En effet, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or, on a vu à la question 3 que $u_n \geqslant 1$, et à la question 2 que si $x \geqslant 1$, $f(x) - x \leqslant 0$. Conclusion, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite est bien décroissante.

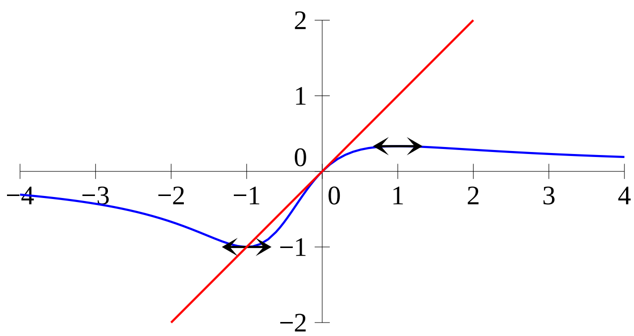
## Exercice 4

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k \leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k \leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k + 1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \dfrac{(2n + 1)^2(2n + 2)^2}{4} = (n + 1)^2(2n + 1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4} = 2n^2(n + 1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n + 1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n + 1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0} (2k + 1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais $P_n$ vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k + 1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k + 1)^3 + (2(n + 1) + 1)^3 = (n + 1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n + 3)^3 =$

$(n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc $P_{n+1}$ est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés $P_n$ sont vraies.

## Exercice 5

1. La fonction $f$ est définie si $x^2+x+1>0$, ce qui est en fait toujours le cas (ce trinome a undiscriminant négatif), donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+x+1)^2}$. La fonction $f$ est donc croissante sur $[-1;1]$, et décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$. Les seules limites à calculer sont celles en $\pm\infty$. En utilisant la factorisation par les termes de plus haut degré, on obtient facilement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Tant qu'on y est, constatons que $f(-1) = -1$, et $f(1) = \dfrac{1}{3}$.
3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$.
4. On a $f(x) - x = \dfrac{x-(x^3+x^2+x)}{x^2+x+1} = \dfrac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \dfrac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$. Cette fraction est du signe de $x+1$, donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de $T$ sur $]-\infty;-1]$, et au-dessus sur $[1;+\infty[$.
5. Voici un joli graphique :




6. On a $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \dfrac{p}{1+p+p^2} \leqslant \dfrac{p}{p+p^2} = \dfrac{1}{p+1}$.
7. Pour $n=0$, on a bien $0 < 1 \leqslant \dfrac{1}{0+1}$. Supposons donc $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. D'après la question précédente, on a alors $f(u_n) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ (regarder le tableau de variations et utiliser que $f(0) = 0$) donc $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ce qui achève la récurrence.
8. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $(u_n)$ tend vers 0.
9. Par définition $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$, donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
10. Une petite récurrence semble s'imposer : pour $n=1$, la proposition prétend que $\dfrac{1}{u_1} \leqslant 2+1 = 3$, ce qui est vrai puisque $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{3}$. Supposons la propriété vraie au rang $n$, et utilisons

la question précédente : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1 + u_n \leqslant n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + 1 + u_n$. Il ne reste plus qu'à utiliser la majoration de la question 7 pour obtenir exactement la formule voulue pour achever la récurrence.

11. On a donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln n$, ou encore $1 \leqslant nu_n - 2u_n + u_n \ln n$, soit $nu_n \geqslant 1 + 2u_n - u_n \ln n$. Comme $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, la limite de $u_n \ln n$ vaut 0, donc $nu_n$ est plus grand qu'une suite tendant vers 1. Or on a aussi $nu_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$, avec le terme de droite qui tend vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$.