

Feuille d'exercices de révision n°2

ECE3 Lycée Carnot

12 octobre 2010

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Déterminer les points fixes de la relation de récurrence définissant la suite (u_n) , c'est-à-dire les réels x vérifiant $x = \frac{2x}{x+1}$ (nous verrons plus tard que ces valeurs sont les limites possibles de la suite (u_n)).

Exercice 2

On considère la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, si $k \geq 2$, alors $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et en déduire un encadrement de S_n .
3. Montrer que, $\forall n \geq 2, S_n \leq 1$.
4. À l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de S_{1000} .

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition, et tracer une allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. On note D la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D .
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \geq 1, u_n \geq 1$.
4. Montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 1$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question 2).

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n .
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Étudier la position relative et les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de T .
5. Construire dans un même repère la courbe $\mathcal{C}$ et la droite T .

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}$, prouver que $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
8. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
9. Vérifier que $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
10. En déduire, à l'aide du résultat de la question 7, que $\forall n \geq 1, \frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.
11. En admettant que $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leq \ln n$, déterminer la limite de nu_n .