

Pour s'échauffer avant le DS...

ECE3 Lycée Carnot

28 septembre 2010

Quelques (in)équations

1. Commençons par constater que $x = 1$ est une racine évidente du membre de gauche. On a donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$, d'où par identification des coefficients $a = 1$; $b = -1$ et $c = -1$. On a donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{5}$. Il ne reste plus qu'à faire un petit tableau :

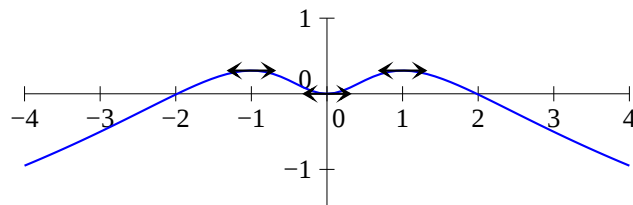
x	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
$x^3 - 2x^2 + 1$	-	0	+

On en conclut que $\mathcal{S} = \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 1 \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$.

2. Cela revient à demander $-2 \leq x^2 - 2 \leq 2$, soit $0 \leq x^2 \leq 4$, donc $\mathcal{S} = [-2; 2]$.
3. Notons que, si $m = 11$, l'équation se simplifie en $36x + 16 = 0$, d'où $\mathcal{S} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$. Dans tous les autres cas, on a une équation du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 4(m + 7)^2 - 20(m - 11) = 4m^2 + 36m + 416 = 4(m^2 + 9m + 104)$, trinôme donc le discriminant est toujours positif, donc lui-même toujours positif. L'équation admet donc toujours deux solutions (qu'on peut expliciter, mais ça n'a vraiment aucun intérêt).

Un exercice classique

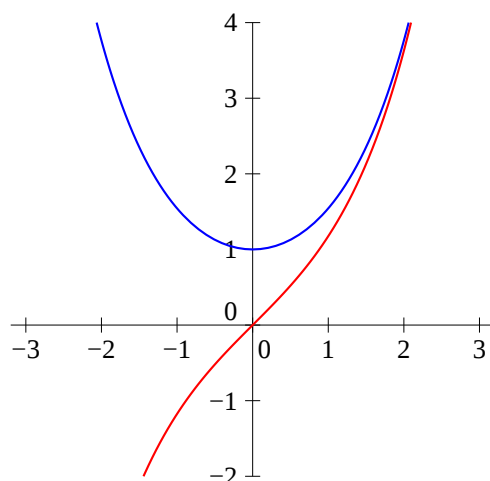
1. Comme $1 + x^2$ est toujours plus grand que 1, la fonction g est toujours définie. De plus, elle est assez manifestement paire (son expression ne dépend que de x^2).
2. Un petit calcul : $g'(x) = \frac{4x(1 + x^2) - 2x \times 2x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{4x + 4x^3 - 4x^3 - 2x - 2x^3}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$.
3. La dérivée s'annule en 1, la fonction est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.
4. Puisque $g(0) = 0$, on aura $g(1) > 0$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (le quotient tend vers 2 et le ln vers $-\infty$), la fonction g s'annulera nécessairement une fois entre 1 et $+\infty$ (si on veut être très rigoureux, c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires).
5. La fonction g est donc positive sur $[0; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; +\infty[$.
6. Ca ressemble à ça :



7. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, et la fonction f est impaire (numérateur pair, dénominateur impair).
8. Calculons : $f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \times x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.
9. Au vu des questions précédentes, f est croissante sur $[0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Par imparité, f est décroissante également sur $] -\infty; -\alpha]$ et croissante sur $[-\alpha; 0]$.

Un problème un peu moins classique

1. On a $sh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x}$, ce qui donne en prenant les logarithmes, $x = -x$, soit $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. $\mathcal{D}_{sh} = \mathcal{D}_{ch} = \mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle est définie partout); et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
3. Calculons $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$, donc ch est paire, et $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire. Quant à f , c'est le quotient de deux fonction impaires, elle est donc paire (on peut refaire le calcul si on veut).
4. Calculons donc : $sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$. Cette dérivée est toujours positive (c'est une somme de deux exponentielles), donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative sur $] -\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$. Passons à la deuxième fonction : $ch'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = sh(x)$. D'après la remarque que nous venons de faire, ch est donc décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
5. Encore un petit calcul : $ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$, donc on a bien $ch(x) > sh(x)$.
6. La tangente à ch en -2 a pour équation $y = sh(-2)(x+2) + ch(-2) = \frac{e^{-2} - e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2} + e^2}{2} = \frac{e^{-2} - e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^2 \simeq -3,65x - 3,55$. Pour sh , on a l'équation suivante : $y = \frac{e^{-2} + e^2}{2}(x+2) + \frac{e^{-2} - e^2}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2}x + \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \simeq 3,75x + 3,85$.
7. En utilisant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on obtient sans difficulté $\lim_{x \rightarrow -\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$.
8. Voici les deux courbes demandées :



9. C'est un calcul de dérivée de quotient tout simple, à tel point qu'il est difficile de le détailler.
10. On a $g'(x) = ch(x) - ch(x) - x sh(x) = -x sh(x)$. On a vu un peu plus haut que $sh(x)$ est toujours du même signe que x , donc $x sh(x)$ est toujours positif, et $g'(x)$ est toujours négatif. Autrement dit, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
11. Comme on a par ailleurs $g(0) = 0 - 0 = 0$, on peut en déduire que f' , qui est du même signe que g , est positive sur $] -\infty; 0[$, et négative sur $]0; +\infty[$. Si on tient absolument à compléter le tableau de variations, on peut prouver que f a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ par croissance comparée. Pour ce qui se passe en 0, c'est l'objet de la dernière question ci-dessous.
12. Oui, mais ce n'est pas si facile à calculer ! Une astuce est d'écrire que $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x - 1}{2x} - \frac{e^{-x} - 1}{2x}$. La première moitié a pour limite $\frac{1}{2}$ (je rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, c'est une des limites classiques vues en cours). La deuxième moitié tend aussi vers $\frac{1}{2}$ pour la même raison (il suffit de remplacer x par $-x$, qui tend tout autant vers 0), donc on a en fait $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.