

Pour s'échauffer avant le DS...

ECE3 Lycée Carnot

28 septembre 2010

Quelques (in)équations

1. Résoudre l'inéquation $x^3 - 2x^2 + 1 > 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2| \leq 2$.
3. Résoudre, en distinguant des cas selon la valeur prise par le paramètre m , l'équation $(m - 11)x^2 + 2(m + 7)x + m + 5 = 0$.

Un exercice classique

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ et $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g est une fonction paire.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, que l'on appellera α (et qu'on ne cherchera pas à déterminer).
5. En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
6. En utilisant la parité de g , donner l'allure de la courbe de g .
7. Préciser l'ensemble de définition de f et déterminer sa parité.
8. Calculer f' , et exprimer f' en fonction de g .
9. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Un problème un peu moins classique

On définit deux fonctions notées ch (pour **c**osinus **h**yperbolique) et sh (pour **s**inus **h**yperbolique) de la façon suivante : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On note également $f(x) = \frac{x}{sh(x)}$.

1. Résoudre l'équation $sh(x) = 0$.
2. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.
3. Déterminer la parité de chacune de ces trois fonctions.
4. À l'aide d'un calcul de dérivée, déterminer les variations de la fonction sh , puis celles de la fonction ch .
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) > sh(x)$.
6. Calculer l'équation de la tangente à chacune des deux courbes en leur point d'équation $x = -2$ (garder les valeurs exactes, puis donner des valeurs approchées des coefficients directeurs, sachant que $e^2 \simeq 7,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$).

7. Déterminer les limites de ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
8. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions sh et ch .
9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{sh(x) - x ch(x)}{(sh(x))^2}$.
10. Étudier les variations de $g : x \mapsto sh(x) - x ch(x)$.
11. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
12. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?