

Problème de révision pour le Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

31 mai 2011

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. On note Z le nombre de lancers ainsi effectués, puis si ce nombre de lancers a été égal à k , on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k , on tire une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée. Dans le cas (extrêmement improbable) où on n'obtient jamais Pile lors de la série de lancers de la pièce, on considère que $X = 0$.

1. Rappeler la loi de Z , ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, X) (en précisant clairement les valeurs pour lesquelles $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$).
- (b) En déduire que, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
- (c) En admettant la formule $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i=k} a_{i,k}$ (où $a_{i,k}$ est une expression pouvant dépendre des deux indices i et k), calculer $\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)$.
3. (a) Montrer que, $\forall i \geq 1$, $iP(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, et en déduire que X admet une espérance.
- (b) En utilisant la même formule d'inversion des sommes qu'à la question 2.c), calculer $E(X)$.
4. (a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que X^2 admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{2^k}$.
- (b) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall k \geq 1$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.
- (c) En déduire la valeur de $E(X^2)$, puis calculer $V(X)$.
5. On note dans cette question $f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$.
- (a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[$ $f'_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$.
- (b) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.
- (c) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n}$, et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.
- (d) Déduire des calculs précédents que $P(X = 1) = \ln 2$.