Sommes, produits, récurrence

ECE3 Lycée Carnot

18 septembre 2010

Pour ce deuxième chapitre, un peu de théorie, puisque celui-ci va nous permettre de définir quelques notations et méthodes supplémentaires qui nous seront bien utiles par la suite (ou peut-être devrais-je dire plutôt pour les suites, puisqu'il s'agit du premier thème faisant intervenir de façon assez intensive le symbole somme et les récurrences).

1 Symbole Σ et propriétés

La somme est l'opération la plus élémentaire qui soit en mathématiques, vous l'utilisez d'aileurs fréquemment depuis une bonne dizaine d'années maintenant. Mais autant sommer deux ou trois nombres est chose aisée, autant l'affaire se complique quand on a besoin de faire la somme d'un grand nombre de termes (voire même d'une infinité, comme on le verra un peu plus tard). Plutôt que de recourir à des petits points à la fois peu rigoureux et inefficaces, on utilise une notation un peu plus complexe au premier abord, mais qui simplifie grandement les calculs une fois maîtrisée.

Définition 1. Le symbole $\sum$ signifie « somme ». Plus précisément, la notation $\displaystyle\sum_{i=2}^{i=7} a_i$ se lit par exemple « somme pour i variant de 2 à 7 des a_i » et peut se détailler de la façon suivante : $\displaystyle\sum_{i=2}^{i=7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

Exemples : On notera $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

Dans l'autre sens, $\displaystyle 2 + 4 + 6 + \cdots + 30 = \sum_{i=1}^{i=15} 2i$.

Remarque 1.

- Les bornes choisies, 2 et 7, ne sont que des exemples, on peut prendre n'importe quoi, y compris des bornes variables, par exemple $\displaystyle\sum_{i=n}^{i=n^2} a_i = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n^2-1} + a_{n^2}$. Par contre, la borne de départ doit toujours être plus petite que la borne d'arrivée (sinon la somme est nulle).
- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres i, j, k, etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale.

Exemple : $\sum_{i=2}^{i=n} a = (n-1)a$ (faites bien attention au nombre de termes que contient la somme...).

Proposition 1. Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante : $\sum_{i=0}^{i=n} ax_i = a\sum_{i=0}^{i=n} x_i$
- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i + b_i = \sum_{i=0}^{i=n} a_i + \sum_{i=0}^{i=n} b_i$
- séparer les indices en deux (relation de Chasles) : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i = \sum_{i=0}^{i=p} a_i + \sum_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}$ (on a posé $j = i-1$)

Remarque 2. Tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$ est par contre une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur ; les sommes et produits ne font pas bon ménage.

2 Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence est un schéma de démonstration que nous utiliserons extrêmement souvent cette année, et qu'il est donc essentiel de maîtriser parfaitement. Réaliser une bonne récurrence n'est pas très compliqué si on se force à bien en respecter la structure, la rigueur est donc de mise pour ne pas dire de bêtise !

Proposition 2. Principe de récurrence : On cherche à prouver simultanément un ensemble de propriétés P_n dépendant d'un entier naturel n. On procède de la manière suivante, qui devront être apparentes dans la rédaction de notre récurrence :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés P_n et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que P_0 est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve P_{n+1} à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence !).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré P_n pour tout entier n.

Proposition 3.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2$
- $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 1 : Calcul de la somme des entiers.

- Nous allons démontrer par récurrence que la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier n.

- Pour $n=0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$, donc P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{i=n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On peut alors effectuer le calcul suivant : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{i=n} i + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui prouve P_{n+1}.
- D'après le principe de récurrence, nous pouvons donc affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 2 : Calcul de la somme des carrés des entiers.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n=0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = 0^2 = 0$, et $\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)(n(2n+1)+6n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 3 : Calcul de la somme des cubes des entiers.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pour $n=0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = 0^3 = 0$, et $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 4 : Calcul de sommes géométriques.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pour $n=0$, nous avons $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0 = 1$, et $\dfrac{1-q^1}{1-q} = 1$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour une entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{k=0}^{k=n+1} q^k = \sum_{k=0}^{k=n} q^k + q^{n+1} = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \dfrac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque 3. Variations du principe de récurrence :

Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer P_n que lorsque $n \geqslant n_0$ (n_0 étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à n_0.
- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de n, mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie P_0 et P_1 lors de l'étape d'initialisation, et on prouve P_{n+2} à l'aide de P_n et P_{n+1} lors de l'hérédité.
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs. Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété P_n pour lui donner un énoncé comment par $\forall k \leqslant n$. Ainsi, lorsqu'on suppose P_n vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de k inférieures ou égales à n (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

Exemple : On considère une suite réelle définie de la façon suivante : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Notre but va être de prouver par récurrence double la propriété P_n : $u_n = 2^{n+1} - 1$.

- double initialisation : pour $n = 0$, $2^1 - 1 = 1 = u_0$, et pour $n = 1$, $2^2 - 1 = 3 = u_1$, donc P_0 et P_1 sont vérifiées.
- hérédité : on suppose que, pour un entier n fixé, P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est-à-dire que $u_n = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$. On peut alors calculer $u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 3 \times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2 = 2 \times 2^{n+2} - 1 = 2^{n+3} - 1$, donc P_{n+2} est vérifiée.
- conclusion : par principe de récurrence double, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Remarque 4. Le problème de ce genre de démonstration est évidemment qu'il faut déjà avoir une idée du résultat pour pouvoir le prouver par récurrence. Ainsi, dans le dernier exemple, il faut conjecturer la forme du terme général de la suite (par exemple en calculant ses premiers termes) avant de pouvoir vérifier la formule par récurrence.

3 Sommes télescopiques, sommes doubles et produits

3.1 Sommes télescopiques

Le concept de somme télescopique ne fait rien apparaitre de nouveau par rapport à ce que nous avons vu dans la première partie du cours, c'est simplement une technique qui permet de calculer explicitement certaines sommes. Nous allons donc la présenter sur un exemple.

Exemple : La somme télescopique consiste à constater que la différence de deux sommes ayant beaucoup de termes communs comporte en fait nettement moins de termes que ce qu'elle n'en a l'air au départ. Considérons $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$. A priori pas évident à calculer, du moins tant qu'on a pas constaté que $\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1} = \dfrac{i+1-i}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i(i+1)}$. On peut alors faire le calcul suivant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3.2 Sommes doubles

Rien ne nous interdit de mettre une somme à l'intérieur d'une autre somme. Dans ce cas, il est toutefois très important d'utiliser deux indices différents pour les deux sommes, sous peine de confusion totale. Plusieurs notations sont possibles pour exprimer des sommes doubles : $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} i\sqrt{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\sqrt{j}$. Cette somme est constituée de n^2 termes qu'on peut par exemple représenter dans un tableau contenant n lignes et n colonnes. L'ordre dans lequel on place les deux sommes est indifférent (d'où également la possibilité de n'utiliser qu'une seule somme), on a donc intérêt à les placer dans l'ordre le plus pratique pour le calcul, ici par exemple : $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}$ (et on ne sait pas calculer la dernière somme).

3.3 Produits

Le fonctionnement est très similaire à celui des sommes :

Définition 2. Le symbole $\prod$ signifie « produit ». Par exemple, $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=5} i = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$.

Définition 3. On appelle **factorielle** de l'entier naturel n, et on note $n!$, le nombre $\displaystyle n! = \prod_{i=1}^{i=n} i$.

Exemples : $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} a = a^n$; $\qquad \displaystyle\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{i=n+1} i}{\prod_{i=1}^{i=n} i} = n+1$

Proposition 4. Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparer ou regrouper des produits ayant les mêmes indices : $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} a_i \times \prod_{i=1}^{i=n} b_i = \prod_{i=1}^{i=n} a_i b_i$
- séparer les indices (relation de Chasles) : $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{i=1}^{i=p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\displaystyle\prod_{i=2}^{i=n+1} a_i = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j+1}$

Remarque 5. Bien entendu, tenter de simplifier $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n}(a_i+b_i)$ serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).

Exemple : Un petit calcul de produit pour finir ce paragraphe. $\displaystyle P = \prod_{i=1}^{i=n} 3i = \prod_{i=1}^{i=n} 3 \times \prod_{i=1}^{i=n} i = 3^n n!$