Chapitre 14 : Polynômes

ECE3 Lycée Carnot

13 mai 2011

Le but de cet assez court chapitre est de mettre par écrit quelques notations et propriétés classiques des polynômes que nous avons en fait déjà pour la plupart utilisées plus tôt dans l'année (le principe d'identification notamment). On en profitera également pour insérer, de manière assez exceptionnelle, un peu d'algorithmique dans ce chapitre, qui sera surtout réutilisée lors de nos TD de Pascal.

1 Définitions, notations

Définition 1. Un **polynôme** P est un objet formel de la forme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$, et $a_k \in \mathbb{R}$, avec de plus $a_n \neq 0$.

Remarque 1. Le X utilisé dans cette définition est souvent appelé **indéterminée** du polynôme P. Il peut être remplacé par n'importe quel objet mathématique pour lequel calculer des puissances a un sens, par exemple une matrice, une fonction ou bien entendu un réel. On aura toutefois souvent tendance à identifier le polynôme P et la **fonction polynômiale** réelle $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$.

Définition 2. L'entier n est le **degré** du polynôme P. Les réels a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P, le réel a_n est le **coefficient dominant** de P.

Définition 3. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On notera également $d^\circ(P)$ le degré d'un polynôme P.

Remarque 2. On peut définir sur $\mathbb{R}[X]$ des opérations de somme et de produit qui vérifient toutes les propriétés usuelles (associativité, commutativité, distributivité). L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par somme (la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n est toujours de degré inférieur ou égal à n), ce qui ne serait pas vrai avec l'ensemble des polynômes de degré n. Nous reviendrons plus en détail sur ce type de propriétés en fin d'année lorsque nous étudierons la notion d'espace vectoriel.

Proposition 1. Soient P et Q deux polynômes, alors $d^\circ(P+Q) \leqslant max(d^\circ(P); d^\circ(Q))$; $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$ et $d^\circ(PoQ) = d^\circ(P) \times d^\circ(Q)$.

Exemple : Dans le cas de la somme, il n'y aura pas égalité dans le cas où P et Q sont de même degré et ont des coefficients dominants opposés. Par exemple, si $P = X^2 - 3X + 2$ et $Q = -X^2 - 5$, on aura $P + Q = -3X - 3$, qui est de degré strictement inférieur au plus grand des degrés de P et Q.

Théorème 1. Un polynôme à coefficients réels correspond à une fonction polynômiale nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire 1. Principe d'identification des coefficients.
Deux polynômes P et Q sont égaux (en tant que fonctions polynômiales) si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

Exemple : C'est un principe qu'on a déjà utilisé de nombreuses fois depuis le début de l'année. Un cas classique d'utilisation de ce résultat est la « décomposition en éléments simples » : on cherche trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$. Pour cela, on part du membre de droite et on réduit tout au même dénominateur : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3} = \dfrac{a(x-2)(x+3)+bx(x+3)+cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \dfrac{ax^2+ax-6a+bx^2+3bx+cx^2-2cx}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{(a+b+c)x^2+(a+3b-2c)x-6a}{x^3+x^2-6x}$. Par identification des coefficients sur les deux numérateurs, on obtient les conditions $a+b+c=2$; $a+3b-2c=3$ et $-6a=-3$, d'où $a=\dfrac{1}{2}$, puis $b+c=\dfrac{3}{2}$ et $3b-2c=\dfrac{5}{2}$. En multipliant par deux la première équation et en ajoutant à la deuxième, on a $5b=\dfrac{11}{2}$, donc $b=\dfrac{11}{10}$, puis $c=2-a-b=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. Finalement, on conclut que $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{11}{10(x-2)} + \dfrac{2}{5(x+3)}$.

2 Évaluation d'un polynôme

Ce paragraphe, de contenu assez original pour un cours de mathématiques, est à mettre en relation avec le TD de Pascal consacré à la complexité. Il vise à présenter un algorithme permettant de calculer l'image d'un réel par une fonction polynômiale de façon plus efficace que la méthode naïve qui est la première à venir à l'esprit.

2.1 Algorithme naïf

Soient donc un polynôme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, et un réel x. On cherche à calculer le plus efficacement possible la valeur de $P(x)$. La méthode « bête » consiste à calculer toutes les puissances de x jusqu'à x^n, puis à multiplier chaque puissance par le coefficient de P correspondant, et enfin à faire la somme de tous les nombres ainsi obtenus. Cette méthode nécessite d'effectuer $2n$ multiplications ($n-1$ pour obtenir les puissances de x allant de x^2 à x^n, puis $n+1$ pour multiplier chacune des puissances par un coefficient), et n additions. Une implémentation possible en Pascal, à l'aide de tableaux, est donnée par le programme suivant :

```
PROGRAM naif;
USES wincrt;
VAR p : ARRAY[0..99] OF real; n,i : integer; a,x,z : real;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?');
ReadLn(p[i]);
END;
a := p[0]; z := 1;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?');
```

```
ReadLn(x);
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := z*x;
a := a+p[i]*z;
END;
WriteLn('P(',x,')=',a);
END.
```

2.2 Algorithme de Hörner

La deuxième méthode que nous allons maintenant présenter consiste simplement à faire les calculs dans un ordre subtilement différent, qui permet d'économiser une partie des multiplications. Elle est fondée sur le résultat suivant :

Proposition 2. Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme et x un réel, alors $P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots(a_{n-1} + xa_n)))$.

Exemple : Soit $P(x) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 6$. On cherche à calculer $P(2)$. La méthode de Hörner consiste à partir de la valeur de a_n, ici 3 puis, à chaque étape, de multiplier la valeur précédente par x et d'ajouter le coefficient qui suit dans l'écriture de P par puissances descendantes. Ainsi, on calculera ici successivement $3 \times 2 - 1 = 5$; $5 \times 2 + 5 = 15$; $15 \times 2 - 4 = 26$; $26 \times 2 + 6 = 58$. On en conclut que $P(2) = 58$.

Cet algorithme est effectivement plus efficace que l'algorithme naïf puisqu'on effectue seulement n multiplications et n additions (une multiplication et une addition à chaque étape). Il est par ailleurs plus facile à programmer en Pascal, et c'est l'algorithme utilisé par toutes les machines qui ont besoin de calculer des images par des fonctions polynômiales.

```
PROGRAM Horner;
USES wincrt;
VAR p : ARRAY[0..99] OF real; a,x : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?');
ReadLn(p[i]);
END;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?');
ReadLn(x);
a := p[n];
FOR i := n-1 DOWNTO 0 DO a := a*x+p[i];
WriteLn('P(',x,')=',a);
END.
```

3 Factorisation

Définition 4. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$. On dit que P est **divisible** par Q (ou que Q **divise** P) s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QR$.

Théorème 2. Division euclidienne sur les polynômes.
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]^2$, alors il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$, et $d^\circ(R) < d^\circ(B)$.

Définition 5. Le polynôme Q est appelé **quotient** de la division euclidienne de A par B. Le polynôme R est le **reste** de cette même division euclidienne.

Exemple : Une division euclidienne de polynômes peut se présenter sous le même forme que la division euclidienne d'entiers que vous avez apprise à l'école primaire. On cherche le terme dominant du quotient, on le multiplie par le diviseur puis on soustrait le résultat obtenu du dividende, et on recommence jusqu'à obtenir le terme de degré 0 du quotient. Ainsi, pour effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3$ par $X^2 - 2X + 1$, on peut présenter le calcul sous la forme suivante :

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr|l}
 & X^4 & - & 3X^3 & + & 5X^2 & + & X & - & 3 & \underline{X^2-2X+1} \\
- & (X^4 & - & 2X^3 & + & X^2) & & & & & X^2-X+2 \\
 & & - & X^3 & + & 4X^2 & + & X & - & 3 & \\
 & & - & (-X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & \\
 & & & & & 2X^2 & + & 2X & - & 3 & \\
 & & & & - & (2X^2 & - & 4X & + & 2) & \\
 & & & & & & & 6X & - & 5 &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3 = (X^2 - X + 2)(X^2 - 2X + 1) + 6X - 5$.

Définition 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est une **racine** du polynôme P si $P(x) = 0$.

Proposition 3. Un réel a est racine du polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P.

Démonstration. C'est une conséquence de la division euclidienne. Si on effectue la division de P par $X - a$, on sait que le reste sera de degré strictement inférieur à celui de $X - a$, donc sera une constante. Autrement dit, $\exists k \in \mathbb{R}$, $P = Q(X - a) + k$. On a donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow Q(a)(a - a) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Autrement dit, a est une racine de P lorsque le reste de la division de P par $X - a$ est nul, donc quand P est divisible par $X - a$. □

Exemple : on a déjà fréquemment utilisé cette propriété pour factoriser des polynômes de degré 3 possédant une récine « évidente ». Soit par exemple $P = 2X^3 - 3X^2 + 5X - 4$. On constate que 1 est racine évidente de P : $P(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$, donc P est factorisable par $X - 1$: $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Par identification, on obtient $a = 2$; $b - a = -3$; $c - b = 5$ et $-c = -4$, donc $a = 2$; $b = -1$ et $c = 4$, soit $P = (X - 1)(2X^2 - X + 4)$. Ce dernier facteur ayant un discriminant négatif, P n'admet pas d'autre racine que 1.

Définition 7. Soit P un polynôme et a une racine de P. On dit que a est une racine **d'ordre de multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X - a)^k$ divise P.

Proposition 4. Une racine a est d'ordre de multiplicité k pour P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Remarque 3. La notation de dérivée pour un polynôme réel correspond à la dérivée de la fonction polynômiale associée. On peut en fait définir formellement le polynôme dérivé d'un polynôme sans passer par une interprétation en terme de fonctions. On notera également qu'on emploie souvent plus simplement le terme d'ordre ou celui de multiplicité à la place d'ordre de multiplicité.

Exemple : Considérons le polynôme $P = X^4 - 2X^3 - 19X^2 + 68X - 60$ et constatons ensemble que 2 est une racine double de P. En effet, on a $P(2) = 16 - 2\times 8 - 19\times 4 + 68\times 2 - 60 = 16 - 16 - 76 + 136 - 60 = 0$; de plus, $P' = 4X^3 - 6X^2 - 38X + 68$, donc $P'(2) = 4\times 8 - 6\times 4 - 38\times 2 + 68 = 32 - 24 - 76 + 68 = 0$. on peut en déduire, via la proposition précédente, que P est factorisable par $(X - 2)^2$. Effectuons une petite division euclidienne pour obtenir cette factorisation :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 2X^3 & - & 19X^2 & + & 68X & - & 60 & & X^2-4X+4 \\
\cline{12-12}
- & (X^4 & - & 4X^3 & + & 4X^2) & & & & & & X^2+2X-15 \\
 & & & 2X^3 & - & 23X^2 & + & 68X & - & 60 & & \\
 & & - & (2X^3 & - & 8X^2 & + & 8X) & & & & \\
 & & & & - & 15X^2 & + & 60X & - & 60 & & \\
 & & & & - & (-15X^2 & + & 60X & - & 60) & & \\
 & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

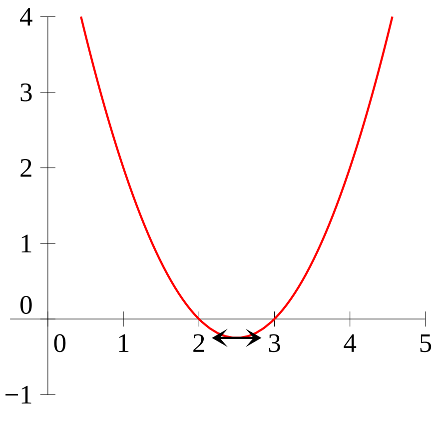
On a donc $P(X) = (X-2)^2(X^2+2X-15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+60 = 64$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X-2)^2(X-3)(X+5)$. On ne risque pas de factoriser plus puisqu'il ne reste que des facteurs de degré 1. En général, on a le résultat suivant :

Théorème 3. Un polynôme de degré n admet au plus n racines réelles. Plus précisément, la somme des multiplictés de ses racines est au plus égale à n.

4 Représentation graphique de fonctions polynômiales

4.1 Rappels sur les polynômes du second degré

La courbe représentative d'une fonction polynômiale de degré 2, donnée par une équation du type $P(x) = ax^2 + bx + c$, est une parabole dont la concavité est donnée par le signe de a (convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$), et de sommet atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points symétriques par rapport au sommet de la parabole. Un exemple de courbe, pour la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (sommet atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$) :



4.2 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 3

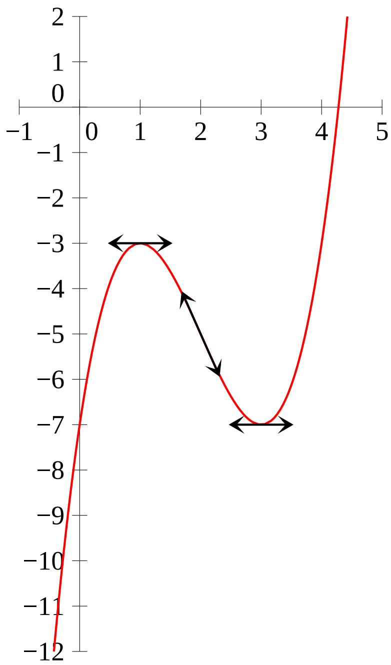
Une fonction f polynômiale de degré 3 a pour dérivée f' une fonction polynômiale de degré 2. L'allure de la courbe représentative de f sera liée au signe du discriminant de f'. Si ce discriminant est positif ou nul, la fonction est strictement monotone (la seule différence dans le cas du discriminant nul est qu'on aura une tangente horizontale au point d'inflexion de la courbe), ressemblant à celle de la fonction cube. Si le discriminant est négatif, la fonction changera deux fois de sens de variation, et admettra accessoirement un unique point d'inflexion situé exactement entre ses deux extrema.

Prenons ainsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$. On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

On peut s'amuser à vérifier que la dérivée seconde $f''(x) = 6x - 12$ s'annule pour $x = 2$, donc entre les deux racines de f' comme prévu (on peut également calculer $f'(2) = -3$ pour tracer la tangente correspondante sur la courbe). De plus, $f(1) = -3$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 - 7 = -7$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Et la petite courbe qui va avec :



4.3 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 4

On peut assez aisément généraliser les résultats du paragraphe précédent en utilisant la borne sur le nombre de racines d'un polynôme en fonction de son degré :

Proposition 5. Une fonction polynômiale de degré n change de variations au plus $n - 1$ fois. Elle admet au plus $n - 2$ points d'inflexion.

Il est par contre difficile en général d'étudier des fonctions polynômiales de degré supérieur ou égal à 4 puisque l'étude du signe de la dérivée ne sera pas faisable de façon exacte en général. Donnons tout de même un dernier exemple où la dérivée a le bon goût d'admettre une racine évidente : soit $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + 6x + 1$. La dérivée de f est $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$. Cette dérivée a pour racine évidente 1, on peut donc écrire $f'(x) = 2(x - 1)(ax^2 + bx + c) = 2(ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c)$. Par identification, on obtient $a = 1$; $b - a = -3$; $c - b = -1$ et $-c = 3$, donc $a = 1$; $b = -2$ et $c = -3$. On a donc $f'(x) = 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et a pour racines $x_1 = \dfrac{2 - 4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2 + 4}{2} = 3$. Finalement, $f'(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)$. Comme $f(1) = \dfrac{9}{2}$; $f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ et $f(3) = -\dfrac{7}{2}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec un peu de courage, on peut rechercher les points d'inflexion : $f''(x) = 6x^2 - 12x - 2 = 2(3x^2 - 6x - 1)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 36 + 12 = 48$ et admet donc deux racines pas suffisamment simples pour qu'on aie envie de pousser les calculs plus loin. Ici, les deux points d'inflexion seront symétriques par rapport au minimum de la courbe, mais en général ce ne sera pas le cas pour une fonction de degré 4. Pour terminer, voici la courbe :