Chapitre 13 : Matrices

ECE3 Lycée Carnot

24 janvier 2011

Introduction

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème très concret suivant : dans le village de Trouperdu, le boulanger doit faire face à trois commandes presque simultanées : une pour un mariage, une de la part de l'école pour un goûter de fin d'année, et une du maire pour une réception. Chaque commande est composée d'un certain nombre d'éclairs, de choux et de tartes, ce qui est récapitulé dans le tableau suivant :

	Éclairs	Choux	Tartes
Mariage	30	50	20
École	40	30	15
Mairie	25	20	10

Au niveau de la cuisine, le boulanger et ses deux collègues se répartissent la tâche : une commande chacun. Ils connaissent bien sûr leurs recettes sur le bout des doigts et savent donc les ingrédients dont ils ont besoin pour chaque patisserie (deuxième tableau ci-dessous, chiffres pas forcément réalistes...) :

	Oeufs	Farine	Sucre
Éclair	1	30	20
Chou	1	20	15
Tarte	3	200	200

S'ils veulent faire chacun le bilan de ce dont ils ont besoin avant de se mettre au travail, on peut à nouveau le présenter sous forme de tableau :

	Oeufs	Farine	Sucre
Mariage	140	5900	5350
École	115	4800	4250
Mairie	75	3150	2800

Pour remplir la première case du dernier tableau, par exemple, on fait l'opération $30 \times 1 + 50 \times 1 + 20 \times 3$, c'est-à-dire qu'on multiplie les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du second, puis on additionne. Eh bien, nos patissiers viennent de réaliser sans le savoir une multiplication de matrices !

1 Définition

Définition 1. Une **matrice** réelle à n lignes et p colonnes (n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) de nombres réels. On note un tel objet $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, a_{ij} est le terme de la matrice A se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 2. L'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 1. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne.

Définition 3. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2. Deux matrices sont égales si elles ont la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et les mêmes coefficients.

2 Opérations sur les matrices

Ces matrices sont naturellement destinées à être manipulées donc, comme pour tout objet mathématique qui se respecte, on aimerait pouvoir faire un peu de calcul avec. Les propositions qui ne sont pas démontrées découlent de manière évidente des propriétés des opérations usuelles sur les réels.

2.1 Addition de matrices

Définition 4. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = M$, où $m_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$. Autrement dit, on fait la somme coefficient par coefficient.

Proposition 1. Propriétés élémentaires de la somme de matrices

- L'addition de matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- L'addition de matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- La matrice nulle est un élément neutre pour l'addition des matrices : $0 + A = A + 0 = A$.
- Pour toute matrice A, il existe une matrice B telle que $A + B = B + A = 0$. on note cette matrice $-A$, elle est simplement obtenue en prenant les opposés des coefficients de A.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2.2 Produit d'une matrice par un réel

Définition 5. Le **produit d'une matrice A par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 2. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad 1.A = A$ et $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $-2A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}$.

2.3 Produit de deux matrices

Définition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $m_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$. Pour s'en souvenir, penser à l'exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe !

Proposition 3. Propriétés élémentaires du produit de matrices :

- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_nA = AI_p = A$.
- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration. L'associativité est une conséquence de l'associativité des sommes (il suffit d'écrire une jolie formule avec des sommes triples). Les diverses distributivités sont une fois de plus une conséquence des règles de calcul sur les réels, il suffit de les écrire pour s'en convaincre.
Penchons nous plutôt sur la propriété $I_nA = A$ (on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité). Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_{ik}A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même. Quand au produit par une matrice nulle, vous pouvez y arriver tous seuls. $\square$

Remarque 3.

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général pas de sens.
- On ne peut en général pas simplifier un produit de matrices : on peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$ ou encore $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- On peut écrire les systèmes d'équations linéaires à l'aide de produits de matrices, mais on reviendra là-dessus un peu plus tard.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

2.4 Transposition

Définition 7. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^tA$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et vice-versa.

Proposition 4. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\ {}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\sum_{k=1}^{p} A_{jk}C_{ki}$. À droite, on a $\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} C_{ki}A_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 8. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si $A = {}^tA$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Une matrice symétrique est nécessairement carrée.

3 Matrices carrées, puissances de matrices

3.1 Vocabulaire

Définition 9. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Définition 10. Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 5. Le produit de deux matrices carrées est une matrice carrée. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration. Pour les matrices carrées, cela découle directement de la définition.
Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.

C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. □

Remarque 4. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

3.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les **puissances** de A de la façon suivante : $A^0 = I_n$, et $\forall k \geqslant 1, \quad A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Proposition 6. On a $A^{k+m} = A^k A^m$ et $(A^k)^m = A^{km}$ pour tous entiers n et m. Pour tout réel λ, on a également $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Démonstration. Tout cela se montre sans difficulté par récurrence. □

Remarque 5. En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$, sauf dans le cas où les deux matrices A et B commutent. En conséquence, les identités remarquables sont fausses sur les matrices, donc attention quand on développe !

Définition 12. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Théorème 1. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. Exactement la même preuve que dans le cas des réels, mais notons qu'il est absolument nécessaire que les matrices commutent pour que la preuve fonctionne. □

Exemple 1 : (matrice diagonale) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : (matrice nilpotente) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3, \quad B^k = 0$.

Exemple 3 : $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $C = 2I_3 + B$, et que I_3 et B sont deux matrices qui commutent (tout le monde commute avec l'identité). On peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (2I_3 + B)^k = (2I_3)^k + k \times (2I_3)^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2} \times (2I_k)^{k-2}B^2 = 2^k I_3 + k2^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2}B^2$. Par exemple, $C^4 = 16I_3 + 32B + 24B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 64 & 48 \\ 0 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Exemple 4 : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $D^2 = -2D + 3I$.
Prouvons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $D^k = u_k D + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $D = 1D+0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $D^0 = 0D+1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $D^{k+1} = D \times D^k = D(u_kD+v_kI) = u_kD^2+v_kD = u_k(-2D+3I)+v_kD = (v_k-2u_k)D+3u_kI$. En posant $u_{k+1} = -2u_k+v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.
Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $\alpha + \beta = 0$ et $-3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\frac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \frac{1}{4}$. On a donc $u_k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \frac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.
On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice D^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).

Exemple 5 : Le retour des chaines de Markov, mais à l'aide de matrices.
Un jeune étudiant en classe préparatoire travaille ou non ses mathématiques chaque soir en procédant de la façon suivante : il peut soit travailler son cours, soit faire des exercices, soit ne rien faire du tout. S'il effectue une certaine activité (ou non-activité) un soir, il y a une chance sur cinq qu'il refasse la même chose le lendemain, et deux chances sur cinq qu'il passe à chacune des deux autres activités. On suppose qu'on démarre notre étude au jour numéro 0, où notre étudiant n'a rien fait. Notons donc R_n : « L'étudiant ne fait rien le jour n » ; C_n : « L'étudiant travaille son cours au jour n » et E_n : « L'étudiant fait des exercices au jour n ». Notons également r_n, c_n et e_n les proabilités respectives de ces évènements. L'énoncé nous donne $r_0 = 1$, et toutes les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$; $P_{R_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{5}$; $P_{R_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}$, etc. Comme toujours dans ce genre de problème, les évènements R_n, C_n et E_n forment un système complet et la formule des probabilités totales nous donne des relations de récurrence du type $r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n$ (et symétriquement pour les deux autres probabilités). Comme nous aurons du mal à expliciter les suites à partir de ces relations, nous allons avoir recours à un point de vue matriciel.

Notons donc M la matrice des probabilités conditionnelles : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, et posons $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ c_n \\ e_n \end{pmatrix}$, suite de matrice-colonnes représentant nos trois suites inconnues. Constatons alors qu'on peut interpréter nos trois relations de récurrence sous la forme d'une seule égalité matricielle : $MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{1}{5}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ c_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$. La relation $X_{n+1} = MX_n$ doit vous faire penser à une suite géométrique, et de fait ça se comporte pareil puisqu'on peut prouver par récurrence (il faudra refaire la démonstration à chaque fois dans ce genre d'exercices) que $X_n = M^n X_0$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ puisque $X_1 = MX_0$ d'après le calcul précédent, et en supposant que $X_n = M^n X_0$, on obtient $X_{n+1} = MX_n$ (calcul précédent) $= M(M^n X_0) = M^{n+1}X_0$. Comme nous connaissons la matrice X_0, il ne reste plus qu'à déterminer les puissances de M pour résoudre le problème.

Il existe plusieurs façon d'effectuer ce calcul, par exemple en constatant que $M = \frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I$, où on a posé $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet de constater que $J^2 = 3J$, relation à partir de laquelle on prouve facilement par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J$. Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du binome de Newton : $\left(\frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{5}J\right)^k \left(-\frac{1}{5}I\right)^{n-k} =$
$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{5^k} J^k \times \frac{(-1)^{n-k}}{5^{n-k}} = \frac{1}{5^n}\left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{k-1}(-1)^{n-k}J\right)$

$$= \frac{(-1)^n}{5^n}I + \frac{1}{3 \times 5^n}\sum_{k=1}^{k=n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}J = \frac{(-1)^n}{5^n}I + \frac{1}{3 \times 5^n}(5^n - (-1)^n)J = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \left(I - \frac{1}{3}J\right).$$

Ouf ! Ce n'est pas très beau, mais on peut expliciter la matrice M^n puis la valeur de r_n, c_n et e_n. Comme $X_n = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit en fait de connaitre les éléments de la première colonne de M^n. On obtient $r_n = (M^n)_{11} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$, et $c_n = e_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Notons que ces trois probabilités tendent vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.