Sujet d'annales : EM Lyon 1997

ECE3 Lycée Carnot

22 juin 2011

Exercice 1

Soient a, b, c trois réels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer $M^2 = 3M$.
(b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0; 3\}$.
- (a) Déterminer, pour chaque valeur propre de M , les vecteurs propres associés.
(b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note $P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer PQ . Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?
(b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
- Déterminer l'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$
- Montrer que l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction à deux variables $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

- (a) Établir que l'équation $e^{-x} = x$, admet une solution et une seule.
(b) Montrer qu'il existe point critique pour la fonction f et établir que $x_0 - e^{-x_0} = 0$ et $y_0 = \frac{x_0}{2}$.
(c) Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0) . Est-ce un minimum ou un maximum ?
- On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0 , et que $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.
 - Former le tableau de variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité 5 cm).
 - On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Établir que la suite (u_n) est croissante et converge vers x_0 .
 - i. Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{8}$.

- ii. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$.
- iii. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.
- iv. Montrer que $f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Exercice 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p . On pourra noter $q = 1 - p$. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
 - si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
 - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = 0$.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$ que $\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$.
En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y) .
8. En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y) .