Limites, continuité

ECE3 Lycée Carnot

27 janvier 2011

1 Limites

1.1 Définitions

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 1. On définit de même une limite égale à $-\infty$, ou des limites infinies quand x tend vers $-\infty$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$, et $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque 2. Cette définition est très similaire à celle de la limite d'une suite. De même, f admet pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \leqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$, alors la fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque 3. Si on y regarde de plus près, cette définition ne fait que retranscrire formellement la notion intuitive de limite : on peut se rapprocher autant que possible de l quitte à se rapprocher suffisamment de a.

Exemple : Prouvons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche une valeur de η telle que $|x - 1| \leqslant \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$. Or, $|x^2 - 1| = |x - 1| \times |x + 1|$ et, si $x \in [1 - \eta; 1 + \eta]$, on a $|x + 1| \leqslant 2 + \eta$, donc $|x^2 - 1| \leqslant \eta(2 + \eta) \leqslant 3\eta$ en prenant $\eta \leqslant 1$, ce qu'on peut toujours supposer puisqu'on ne cherche qu'une valeur qui fonctionne. Il suffit alors de poser $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour satisfaire à la définition d'une limite finie.

Définition 4. On dit que f admet l pour limite à gauche en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $x \in [a - \eta; a[\Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$. De même, on peut définir une limite à droite en a égale à l.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier une limite à gauche et une limite à droite différentes. Par exemple, $\lim\limits_{x\to2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to2^+} Ent(x) = 2$.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I\backslash\{a\}$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Remarque 4. La présence de l'inégalité $0 < |x - a|$ est nécessaire puisque la fonction, dans le cas où elle serait définie en a, ne pourrait y admettre un limite infinie. On définit de même une limite égale à $-\infty$ en a en changeant le sens de la dernière inégalité. On peut prolonger la notion de limite à gauche et à droite au cas de limites infinies.

1.2 Opérations et limites

Les résultats étant exactement les mêmes que ceux déjà vus dans le cas des suites. Le fait que la limite soit prise en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a ne change absolument rien aux contenus des tableaux, que nous ne reproduirons donc pas ici.

Exemple : On cherche la limite de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ quand x tend vers 1. Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^2+3 = 4$ et $\underset{x\to 1}{x} - 1 = 0^+$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Remarque 5. Le signe étant particulièrement important lors du calcul de ce genre de limites, on aura souvent besoin de recourir à des tableaux de signe pour déterminer par exemple si un dénominateur a pour limite 0^+ ou 0^-.

1.3 Négligeabilité, équivalence

Les notions de négligeabilité et d'équivalence pour les fonctions sont très proches de ce qu'on a pu voir sur les suites. La différence est que, pour une fonction, il est indispensable de préciser à quel endroit l'équivalence ou la négligeabilité est valable. Un équivalent valable quand x tend vers $+\infty$ ne l'est en général pas quand x tend vers 0.

Définition 6. Soient f et g deux fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de a (qui peut être égal à $+\infty$ ou à $-\infty$), alors f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, ce que l'on note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. La fonction f est négligeable devant la fonction g si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qu'on note $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Exemples : On peut réinterpréter les limites classiques en termes d'équivalents et de négligeabilité, notamment $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

Les propriétés et utilisations habituelles des équivalents sont les mêmes que pour les suites :

- Deux fonction équivalentes en a y ont le même comportement (et notamment y admettent la même limite quand elle en ont une) d'où l'intérêt des équivalents pour les calculs de limites et de branches infinies.
- On peut multiplier, diviser, inverser, élever à une puissance quelconque (mais constante) un équivalent.
- On ne peut toujours pas additionner ni composer des équivalents en général.

1.4 Asymptotes

Par définition, une asymptote est une droite dont la courbe représentative d'une fonction se rapproche « à l'infini » (éventuellement en la coupant, contrairement à une croyance très répandue). Il en existe de trois types, auxquelles nous allons ajouter la notion de branche infinie.

Définition 7. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Remarque 6. Cela suppose que la fonction f n'est pas définie en a (cas le plus fréquent), ou y admet une discontinuité violente.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ admet les deux droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$ comme asymptotes verticales.

Définition 8. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = a$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ ou si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 9. La courbe représentative d'une fonction f admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$) si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$. Une autre façon de voir les choses est de dire que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x) = 0$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (voir plus loin pour le détail d'un calcul du même genre).

1.5 Branches paraboliques

Définition 10. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemples : Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln x$ admettent une branche parabolique de direction (Ox).

Définition 11. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Oy) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction $x \mapsto e^x$ en $+\infty$.

Définition 12. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$ ($a \neq 0$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Remarque 7. Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais tout en s'éloignant de toute droite parallèle à celle-ci (sinon il y aurait une asymptote oblique).

Exemple : La fonction $f(x) = x + \ln x$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Plan d'étude des branches infinies :

Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

- On calcule la limite de f. Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy). S'il y a une limite finie non nulle a, on continue.
- On calcule la limite de $f(x) - ax$. Soit elle est finie égale à b et on a une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$, soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

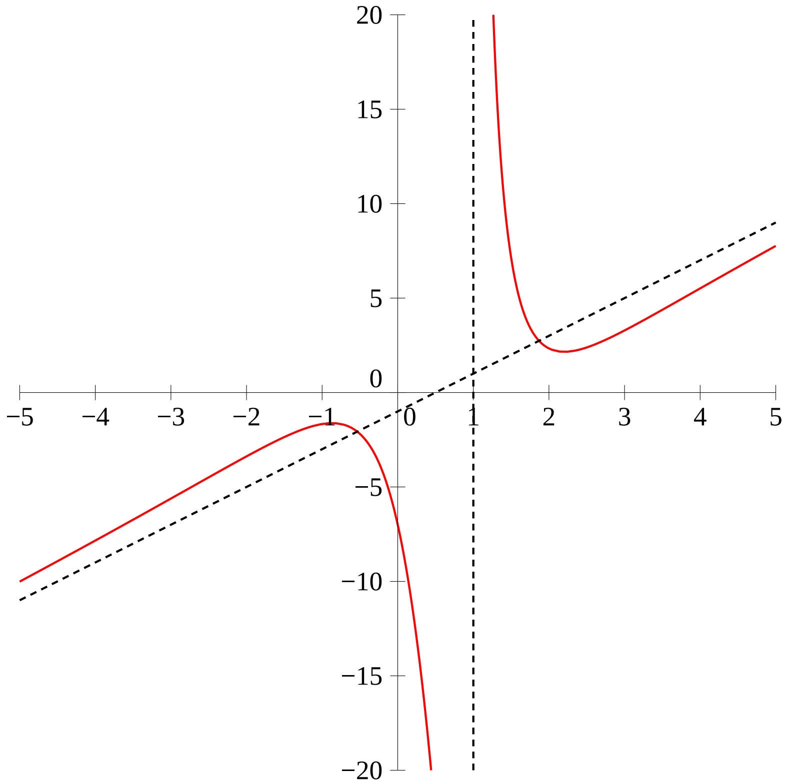
Étude des branches infinies de $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ **:**

Commençons par déterminer le domaine de définition : $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ a pour racine évidente $x = 1$, et se factorise en $(x - 1)(x^2 - x + 1)$ (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinome $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes : $\lim_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\lim_{x\to 1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$, donc $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, ce qui nous suffit à connaitre l'existence d'une symptote verticale d'équation $x = 1$.

De plus, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{2x^4}{x^3} = 2x$ (la définition des équivalents, utilisés ici pour ne pas surcharger les calculs, est donnée un peu plus loin dans le cours), donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. De même, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Reste à calculer $f(x) - 2x = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \dfrac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$, qui a pour limite -1 en $\pm\infty$ (même méthode qu'au-dessus). Conclusion : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Voici l'allure de la courbe :

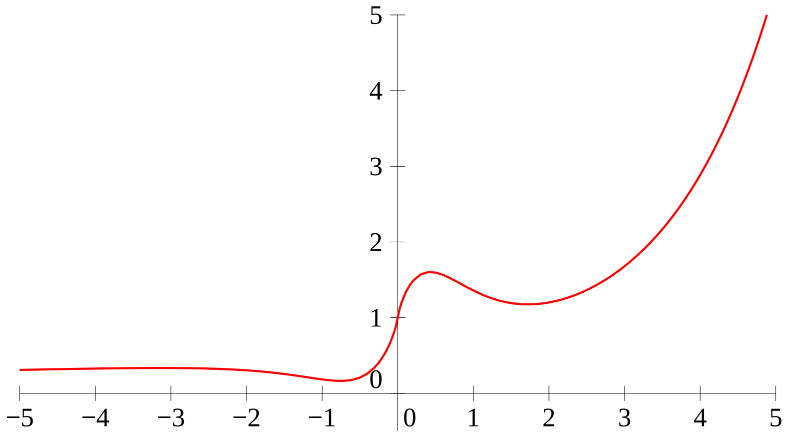


Étude des branches infinies de $g(x) = \dfrac{e^x - x\ln|x|}{x^2+1}$

Le dénominateur ne s'annulant jamais, g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (il faut tout de même avoir $|x| > 0$). Quand x tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

Comme on a par ailleurs, en utilisant croissances comparées et équivalents, $\underset{x\to+\infty}{f}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{x\ln(-x)}{x^2} = \dfrac{\ln(-x)}{x}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

L'allure de la courbe :



1.6 Propriétés supplémentaires

Comme dans le cas des suites, on a des propriétés intéressantes à partir de comparaisons entre fonctions :

Proposition 1. Soit I un intervalle f, g et h trois fonctions définies sur I, f et g admettant pour limites l et l' en x_0 (x_0 étant un élément de I, une borne de I, ou un infi) , alors :

- si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, $l \leqslant l'$.
- si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et $l = l'$, alors h admet pour limite l en x_0 (théorème des gendarmes).

Ces résultats restent valables avec des limites infinies.

Exemple : On cherche la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2}$. Partons du fait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant Ent(x) \leqslant x+1$. On a donc $2x+5 \leqslant 2\,Ent(x)+5 \leqslant 2x+7$, et $x-2 \leqslant Ent(x)-2 \leqslant x-1$, donc $\forall x > 2$ (dans ce cas, tout est positif), $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{1}{x-2}$, et en faisant le produit des inagalités (tout est positif si $x > 2$), on a $\dfrac{2x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{2x+7}{x-2}$. Chacun des deux termes encadrant la fonction ayant pour limite 2, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Proposition 2. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$ (résultat également valable avec des limites infinies).

2 Continuité

2.1 Définitions

Définition 13. Une fonction f définie sur I est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \in a} f(x) = f(a)$.

Définition 14. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : On a $\lim\limits_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$. La fonction partie entière n'est donc pas continue en 2, elle n'y est continue qu'à droite.

Définition 15. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 1. Les fonctions usuelles suivantes : polynomes, logarithmes, exponentielles, puissances, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 3. Soient f et g deux fonction continues en a, alors les fonctions $f+g$ et fg sont aussi continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés d'opérations sur les limites. De même pour la propriété qui suit, qui découle des compositions de limites. $\square$

Proposition 4. Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Remarque 8. Ces résultats restent bien entendu vrais sur un intervalle. On dira souvent sans plus de détail qu'une fonction obtenue par ces opérations à partir de fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition « par théorèmes généraux ».

Proposition 5. Soit f une fonction définie sur $I\backslash\{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée). On parle de prolongement par continuité de f en a.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Théorème 2. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x \in [a;b]$ tel quel $f(x) = c$.

Corollaire 1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b])$ est un segment. En notant $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ la plus petite valeur prise par f sur $[a;b]$ et $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ la plus grande valeur prise par f sur $[a;b]$, on a donc $f([a;b]) = [m;M]$.

Remarque 9. Attention, l'hypothèse de continuité est indispensable (par exemple, $Ent([0;5]) = \{0;1;2;3;4;5\}$, seules les valeurs entières sont prises par la fonction), et le fait qu'on soit sur un segment également. La fonction inverse a beau être continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle n'y a ni maximum, ni minimum. De plus, il faut se méfier du fait qu'en général $f([a;b]) \neq [f(a), f(b)]$. Par exemple, si f est la fonction carré, $f([-2;3]) = [0;9]$.

Démonstration. On ne fera pas cette démonstration un peu technique, qui utilise d'ailleurs un peu plus que le simple théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Corollaire 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 10. La nature de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Ainsi, si f est la fonction carré, $f(]-2;3[) = [0;9[$.

Méthode de dichotomie

Proposition 6. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par a_n ou b_n.

Démonstration. Commençons par prouver par récurrence la propriété P_n : $a_n \leqslant b_n$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = a \leqslant b_0 = b$ et $b_0 - a_0 = b - a$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie, on a alors deux cas possibles pour la définition de a_{n+1} et b_{n+1}. Dans le premier, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$. Comme $a \leqslant b$, on a prouvé par la même occasion que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. Dans le deuxième cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$ et on conclut de la même façon. La propriété est donc vraie pour tout entier par principe de récurrence.

La suite $b_n - a_n$ étant géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, elle converge vers 0. De plus, (a_n) est une suite croissante (en effet, soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \geqslant 0$), et (b_n) est décroissante (soit $b_{n+1} = b_n$, soit $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n-b_n}{2} \geqslant 0$). Finalement, les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite α.

Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$, ce que nous ne ferons pas complètement : on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)$ est du signe de $f(a)$ (la construction est faite pour cela) et $f(b_n)$ du signe de $f(b)$ (une petite récurrence supplémentaire pour ces propriétés), donc $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont toujours de signe contraire. Or, ces deux suites convergent vers $f(\alpha)$ car f est continue. Le réel $f(\alpha)$ doit donc être à la fois positif et négatif, il est nécessairement nul. $\square$

Exemple d'utilisation : On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4x = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction g est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction g est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel α, et f est donc décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de α. On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de g se trouve dans l'intervalle $[-1;0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5;0]$. Puis on calcule $g(0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5;-0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

2.3 Compléments sur les bijections

Proposition 7. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux élément de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x-\varepsilon; x+\varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x-\varepsilon)$, $y_2 = f(x+\varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y-y_1; y_2-y)$. On a alors $[y-\eta; y+\eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y-\eta; y+\eta]) \subset [x-\varepsilon; x+\varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. □

Exemple : Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + 3x + e^x$. Cette fonction est continue et strictement croissante (c'est une somme de fonctions croissantes), donc bijective vers $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Sa fonction réciproque g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Application : On définit la suite (u_n) de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, u_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n\ln n = n(1-\ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $x_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).

Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que f_n^{-1}, qui est définie sur $[n(1-\ln n); +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty; \ln n]$, est de même monotonie que f_n), on peut en déduire que $u_n > 0$.

On peut prouver de même que la suite (u_n) est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -nu_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel l. Pour déterminer la valeur de l, il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^l$. Or, par définition, $e^{u_n} = nu_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = e^l$. Ceci n'est possible que si $l = 0$ (sinon, nu_n tendrait vers $+\infty$), et on en déduit au passage que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$, c'est-à-dire que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.