Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

3 septembre 2009

Pour ce premier chapitre de l'année, on commence en douceur (enfin, tout est relatif, naturellement) avec un retour sur quelques notions et résultats sur les fonctions usuelles que vous avez pour la plupart déjà vus en lycée. Pour cette raison, mais également parce que nous manquons encore de définitions précises, ce chapitre comportera exceptionnellement peu de démonstrations (elles seront, je vous rassure tout de suite, refaites au cours de l'année). Disons que vous avez là une compilation de choses que nous utiliserons suffisamment souvent pour je considère normal que vous les ayez en permanence en tête.

1 Vocabulaire

1.1 Ensembles et domaines de définition

Nous reverrons plus en détail dans un chapitre ultérieur les opérations sur les ensembles, nous nous contenterons donc ici du strict minimum.

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il est souvent décrit par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2;3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 3\}$. Le symbole $\in$ signifie « appartient à » et le symbole $\mid$ signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 2. Un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E. On le note $F \subset E$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7} \in [2;3[$, mais $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2;3[$.

Définition 3. Nous utiliserons tout au long de l'année les deux symboles supplémentaires suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :
- le symbole $\exists$ signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0;1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0;1]$, $f(x) = 0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0;1]$ s'écrit $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 2. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \neq y \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

Définition 4. Le symbole $\Rightarrow$ est un symbole d'**implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole $\Leftrightarrow$ est un symbole d'équivalence : $A \Leftrightarrow B$ signifie que A implique B **et** B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A \Rightarrow B$ et sa **réciproque** $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 3. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A \Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A (on reviendra sur ce concept plus tard).

Définition 5. Le **domaine de définition** d'une fonction d'une variable réelle est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$. Sauf mention du contraire, le domaine de définition est constitué de tous les réels pour lesquels $f(x)$ peut être calculé.

Exemples : Les trois cas nécessitant un peu de réflexion à notre niveau sont les suivants :

- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty;2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

1.2 Parité et périodicité

Définition 6. Une fonction réelle f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Une fonction réelle f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto x^2 + 12$ est paire. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est impaire.

Remarque 4. La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 7. Une fonction réelle f est **périodique de période** T si, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

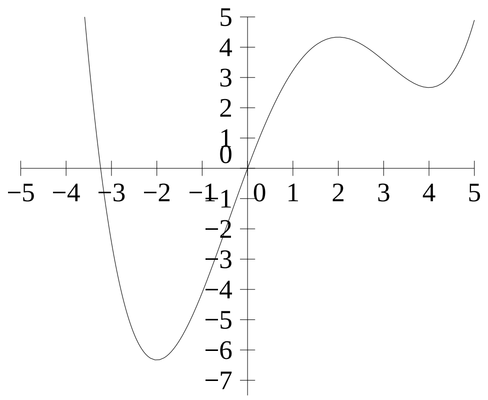
Remarque 5. La représentation graphique d'une fonction périodique de période T est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Nous verrons un exemple de telle fonction plus loin dans ce chapitre.

1.3 Monotonie et bornes

Définition 8. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 9. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Exemple : La fonction représentée ci-dessous admet un minimum global en -2, un minimum local en 4, un maximum local en 2 et pas de maximum global.



Définition 10. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 6. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction carré a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, mais elle est aussi minorée par -2, -15 et tout plein d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Variations

Ca paragraphe sera très court, puisque je ne reviendrai volontairement pas sur les calculs et autres propriétés des dérivées que vous avez vus au lycée (nous aurons un chapitre entier consacré à la dérivation dans quelques mois). Il va toutefois de soi que devez connaitre vos dérivées de fonctions usuelles sur le bout des doigts.

Proposition 1. Si f est une fonction dérivable en a, le nombre dérivé $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe représentative de la fonction f. Plus précisément, cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Et comme il n'y a pas que la dérivée dans la vie, rappelons les propriétés suivantes, valables pour des fonctions qui ne sont pas supposées dérivables.

Proposition 2. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

Si f et g sont de même monotonie sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est croissante sur I. Si f et g sont de monotonie opposée sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Il faut faire très attention aux intervalles pour les composées. Prenons $h(x) = (2x - 4)^2$. On peut écrire $h = g \circ f$, où f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ et g la fonction carré décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(]-\infty; 2]) = \mathbb{R}_-$, et $f([2; +\infty[) = \mathbb{R}_+$, on peut conclure que h est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

3 Logarithmes et exponentielles

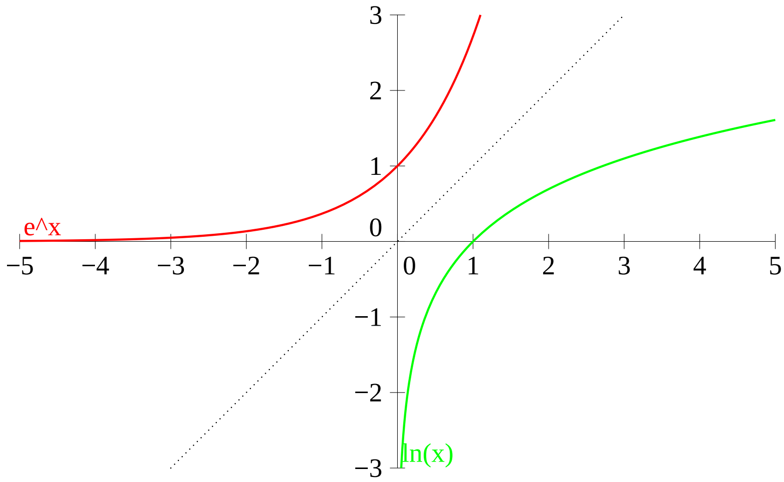
La cohérence des définitions et les résultats de ce paragraphe sont provisoirement admis.

3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 11. La fonction **logarithme népérien**, notée ln est l'unique primitive de la fonction inverse définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

Proposition 3. Variations de la fonction ln : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Voici la courbe représentative du logarithme népérien, ainsi que celle de l'exponentielle :



Proposition 4. Régles de calcul avec la fonction ln : le logarithme népérien transforme les produits en somme et les quotients en différences. On a donc $\forall (x,y) > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Cas particulier : $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Enfin, on a également, découlant de la première formule, $\ln(x^n) = n \ln x$ pour tout entier naturel n.

3.2 La fonction exponentielle

Définition 12. La fonction **exponentielle**, notée $\exp : x \mapsto e^x$ est la réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$.

Proposition 5. La fonction exponentielle est dérivable, et elle est sa propre dérivée. Elle est strictement croisssante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Remarque 7. Les courbes de l'exponentielle et du logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 6. Les régles de calcul avec la fonction exponentielle sont les mêmes que les règles de calcul sur les puissances. Rappelons au passage que $e^1 = e \simeq 2,71$.

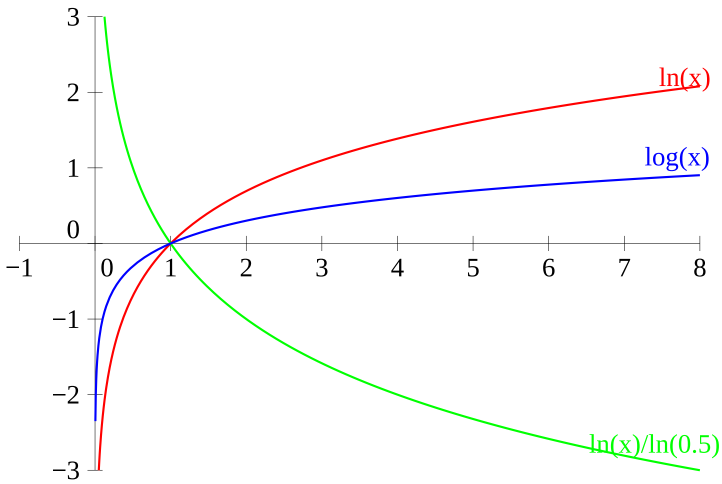
3.3 Logarithmes et exponentielles de base a

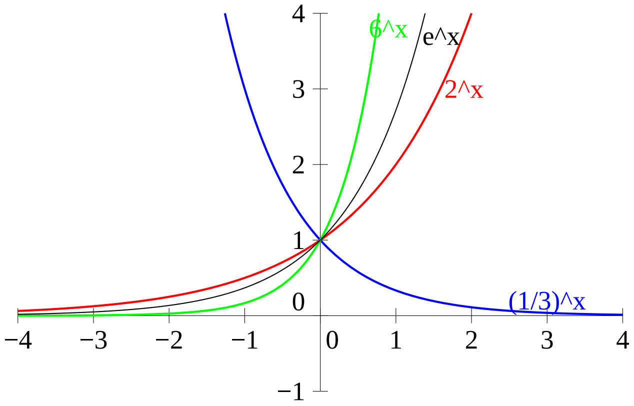
Définition 13. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on définit la fonction **logarithme de base** a sur $]0;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, et la fonction **exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$ (plus simplement noté $\exp_a(x) = a^x$.

Proposition 7. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont réciproques l'une de l'autre. Elles vérifient les mêmes règles de calcul que ln et exp respectivement. Elles sont toutes deux strictement croissantes sur leur ensemble de définition si $a > 1$, et strictement décroissantes sinon.

Remarque 8. Le logarithme népérien n'est donc rien d'autre que le logarithme de base e. On note habituellement log la fonction logarithme de base 10, aussi appelé logarithme décimal.

Voici quelques exemples de courbes de fonctions logarithmes, puis de fonctions exponentielles :





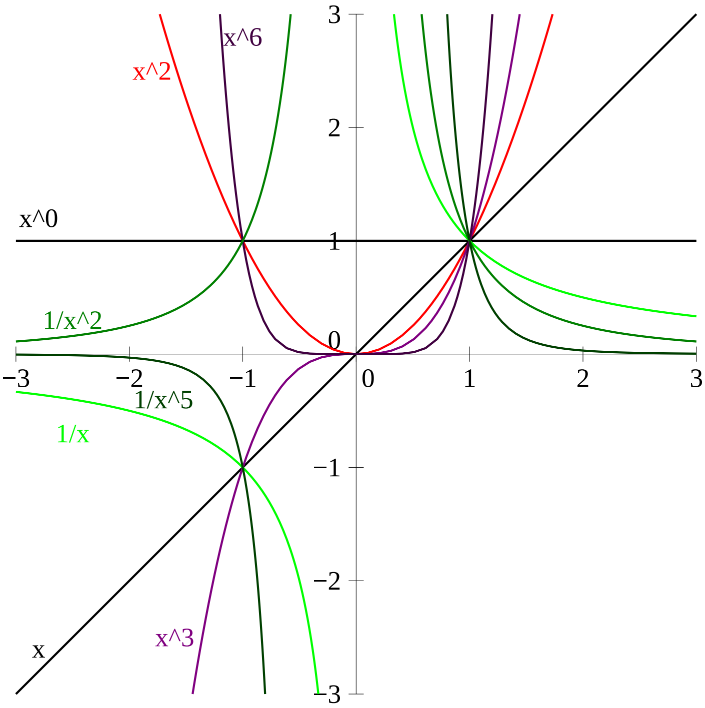
4 Fonctions puissances

4.1 Puissances entières

Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, la fonction f_n est paire. Si n est impair, f_n est impaire. La fonction f_0 est constante égale à 1. Pour n impair, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; pour n pair non nul, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si n est un entier négatif, on définit également une fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}}$. La parité de ces fonctions est toujours la même que celle de n. Si n est impair, f_n est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ (mais ne dites surtout pas qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on ne parle de monotonie que sur un intervalle). Si n est pair, f_n est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Voici quelques exemples de courbes de puissances entières :



4.2 Puissances quelconques

À l'aide des fonctions ln et exp, on peut définir des fonctions puissances pour des puissances non entières, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Définition 14. La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_a : x \mapsto e^{a \ln x}$. On la note plus simplement $f_a(x) = x^a$.

Proposition 8. Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_a'(x) = ax^{a-1}$. La fonction f_a est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.

Ces nouvelles fonctions puissances ressemblent en fait beaucoup aux précédentes. Pour la peine, je me dispense de vous donner des exemples de courbes représentatives.

Remarque 9. Si $a \neq 0$, la fonction f_a est réciproque de la fonction $f_{\frac{1}{a}}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\frac{1}{n}}$ correspond à la notion de racine n-ième. On a par exemple $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

5 Limites classiques

Quelques résultats qui peuvent servir, notamment ceux de croissance comparée, qui sont absolument fondamentaux.

Proposition 9. On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Proposition 10. : Croissance comparée des fonctions usuelles en $+\infty$.

- $\forall a > 1, \forall b > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0, \forall c > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les « plus fortes » étant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \ln x \quad (\ln x)^2 \quad (\ln x)^{47} \qquad \sqrt{x} \quad x \quad x^2 \quad x^{2436525} \qquad 1,2^x \quad 2^x \quad e^x \quad 12^x$

Remarque 10. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :
- $\forall a > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0, \forall c > 0, \lim\limits_{x \to 0^+} x^b (\ln x)^c = 0.$

6 Valeur absolue, partie entière

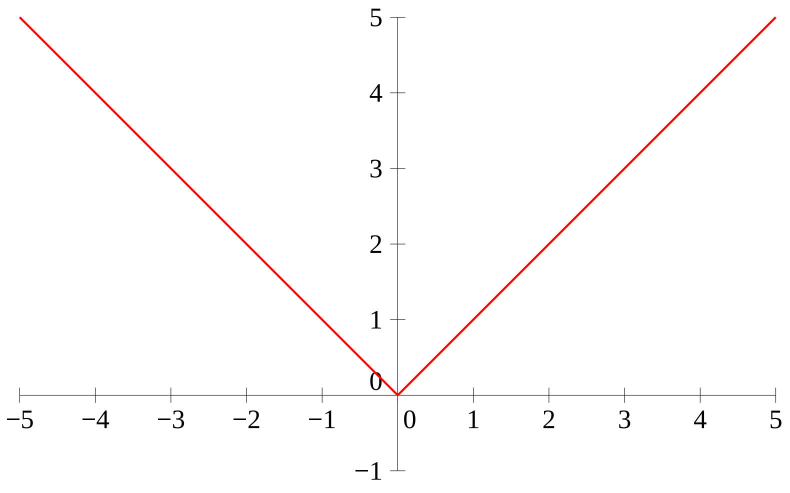
6.1 La fonction valeur absolue

Définition 15. La fonction **valeur absolue** est notée $x \mapsto |x|$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

Remarque 11. Autrement dit, la valeur absolue d'un réel x est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels x et y, $|x - y|$ représente la distance entre x et y. Cette notion de distance est notamment très utile pour résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs absolues. Cf la première feuille de TD pour des exercices faisant intervenir de telles résolutions, notons simplement deux cas à retenir absolument car ils nous serviront beaucoup par la suite :
- $|x - a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ (où ε est un réel positif).
- $|x - a| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x < a - \varepsilon$ ou $x > a + \varepsilon$.

Proposition 11. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



Proposition 12. Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :
- $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leqslant |x| + |y|$

Démonstration.

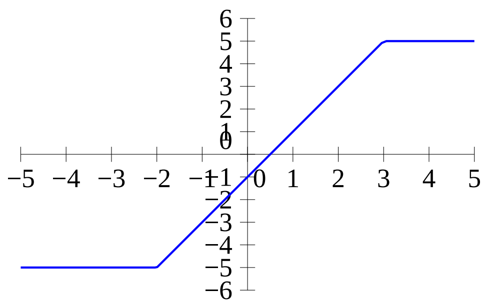
- Le premier point est une simple reformulation de la parité de la fonction valeur absolue.
- Si x et y sont de même signe, xy est positif, donc $|xy| = xy$, et $|x| \times |y| = xy$ ou $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$ selon le signe commun de x et y. Si x et y sont de signe différent, $|x| \times |y| = -xy$, et xy étant négatif, $|xy| = -xy$. Dans tous les cas, ça marche !
- Pour le quotient, c'est exactement comme pour le produit, les règles de signe étant les mêmes.
- Si x et y sont tous deux positifs, $x + y$ l'est également et $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. De même, si x et y sont négatifs, $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$. Enfin, supposons x positif et y négatif (x et y jouant un rôle symétrique, le dernier cas sera démontré par la même occasion). On ne connait alors par le signe de $x + y$, mais ce qui est certain c'est que $y \leqslant x + y \leqslant x$. On a alors certainement $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|) \leqslant |x| + |y|$.

□

Exemple : Dans les cas où les valeurs absolues continuent à poser des problèmes de calcul, il est encore plus prudent de séparer plusieurs cas selon les valeurs de x. Imaginons que nous cherchions à tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x + 2| - |x - 3|$. Trois cas se présentent :

- si $x \leqslant -2$, $x + 2$ et $x - 3$ sont tous deux négatifs, donc $f(x) = -(x + 2) + (x - 3) = -5$
- si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $x + 2$ est positif et $x - 3$ négatif, donc $f(x) = x + 2 + x - 3 = 2x - 1$
- enfin, si $x \geqslant 3$, $f(x) = x + 2 - (x - 3) = 5$

La courbe recherchée ressemble donc à ceci :



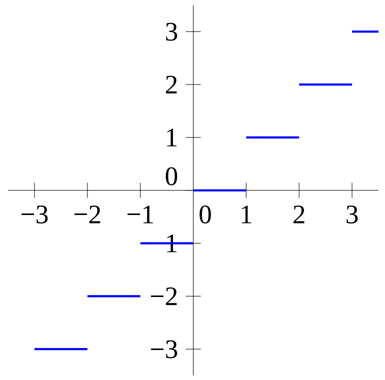
6.2 Les fonctions partie entière et décimale

Définition 16. La fonction **partie entière** est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $Ent(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples : $Ent(2,65743565678) = 2$; $Ent(5) = 5$; $Ent(-3,4) = -4$. Autrement dit, la partie entière de x est le seul entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x \leqslant Ent(x) + 1$.

Proposition 13. La fonction partie entière est constante par morceaux. Elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n + 1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Voici la courbe de la fonction partie entière :



Définition 17. La fonction **partie fractionnaire** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x - Ent(x)$.

Proposition 14. La fonction partie fractionnaire coïncide avec la fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0; 1[$, et est périodique de période 1. Elle est continue sur tout intervalle de la forme $[n; n + 1[$ et toujours positive.

Voici la courbe de la fonction partie fractionnaire :