

Feuille d'exercices n°8 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

1^{er} décembre 2010

Exercice 1 (**)

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ 2x + 4y - 5z = -12 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 &\leftarrow 3L_1 - L_3 \end{aligned} \\ & \begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ -8y + 15z = 38 \\ -4y + 16z = 36 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ & \begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ -8y + 15z = 38 \\ -17z = -34 \end{cases} \end{aligned}$$

On remonte le système : $z = 2$, puis $-8y = 38 - 15z = 8$, donc $y = -1$, et enfin $x = 13 + 2y - 5z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ & \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ & \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2y - 3z = -13 \\ 2y - z = 1 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2y - 3z = -13 \\ -4z = -12 \end{cases} \end{aligned}$$

On remonte le système : $z = 3$, puis $-2y = -13 + 3z = -4$, donc $y = 2$, et enfin $x = -6 - y + 3z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; 3)\}$.

Pour le troisième système, on peut tricher un peu et éviter de recourir au pivot : commençons par soustraire les deux premières lignes : on obtient $-x = 1$, donc $x = -1$. La dernière équation devient alors $2y + 2z = 3$, soit $y + z = \frac{3}{2}$. En reportant dans la première équation, on a donc $-1 + \frac{3}{2} + t = 2$, soit $t = \frac{3}{2}$. La deuxième équation nous donne la même chose, on a donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(-1; y; \frac{3}{2} - y; \frac{3}{2} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 &\leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_4 &\leftarrow 2L_1 - L_4 \end{aligned} \\
& \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 5y + 8z - t = 4 \\ 4y + 10z - 8t = 14 \\ 7y + 4z - 5t = 20 \end{cases} & \begin{aligned} L_3 &\leftarrow 8L_2 - L_3 \\ L_4 &\leftarrow 5L_2 - L_4 \end{aligned} \\
& \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 5y + 8z - t = 4 \\ 36y + 54z = 18 \\ 18y + 36z = 0 \end{cases} & L_4 \leftarrow L_3 - 2L_4 \\
& \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 5y + 8z - t = 4 \\ 36y + 54z = 18 \\ -18z = 18 \end{cases}
\end{aligned}$$

Je me suis permis de ne pas triangulariser de façon standard pour avoir des calculs un peu plus simples. On obtient donc $z = -1$, puis $36y = 18 - 54z = 72$, donc $y = 2$; $-t = 4 - 5y - 8z = 2$, donc $t = -2$, et enfin $x = 6 - 2y - 3z + 2t = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; -1; -2)\}$.

Le cinquième système est constitué de deux équations proportionnelles (on a $L_1 = -2L_2$) donc équivalentes. Tout ce qu'on peut faire est exprimer une inconnue en fonction des deux autres, par exemple $\mathcal{S} = \{(x; y; 2x + y - 1) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$$\begin{aligned}
6. \quad & \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_1 - L_3 \end{aligned} \\
& \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + z = 2a + b \\ y + z = a - c \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système ne peut avoir de solution que si $2a + b = a - c$, c'est-à-dire si $a + b + c = 0$. Dans ce cas, on a $y = 2a + b - z$, et $x = a - 2y + z = -3a - 2b + 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(-3a - 2b + 3z; 2a + b - z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 2 (***)

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré 3. Chacune des conditions imposées se traduit sous forme d'équation linéaire sur les coefficients du polynôme : $P(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + c + d = 1$; $P(-1) = 1 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 1$; et comme $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $P'(1) = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 1$. La différence des deux premières équations donne $a + c = 0$, soit $c = -a$, et la dernière équation devient alors $2a + 2b = 1$, soit $b = \frac{1}{2} - a$. Enfin, la somme des deux premières équations se traduit par $b + d = 1$, soit $d = 1 - b = a + \frac{1}{2}$. On a finalement $\mathcal{S} = \left\{ \left(a; \frac{1}{2} - a; -a; a + \frac{1}{2} \right) \right\}$. Un exemple de polynôme solution est obtenu en prenant $a = 1$, on a alors $P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$. La solution n'est pas unique, il y a un polynôme différent pour chaque valeur possible de a .

Même principe, mais avec un polynôme de degré 4, donc de la forme $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. La première équation donne simplement $e = 0$, et les quatre autres se traduisent sous forme d'un magnifique système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 2 \\ 81a + 27b + 9c + 3d = 3 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 14a + 6b + 2c = 0 \\ 78a + 24b + 6c = 0 \\ 252a + 60b + 12c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{12} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 7a + 3b + c = 0 \\ 13a + 4b + c = 0 \\ 21a + 5b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 7a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = 0 \\ 14a + 2b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant respectivement équivalentes à $b = -6a$ et $b = -7a$, on en déduit que $a = 0$, puis $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$. Il n'y a donc qu'un polynôme vérifiant les conditions imposées : $P(x) = x$ (tout ça pour ça...).

Exercice 3 (**)

Notons a , b , c et d les coefficients respectifs des mathématiques, des langues, du français et d'AEHSC. Le tableau de notes se traduit alors (en divisant tout par 10 pour avoir des coefficients plus sympathiques) :

$$\begin{cases} b + 2c + d = 31 \\ a + b + c + d = 30 \\ b + c + 2d = 29 \\ 2b + c + d = 28 \\ 2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 27 \end{cases}$$

Pas besoin d'utiliser le pivot pour résoudre un tel système : $L_1 - L_3$ donne $c - d = 2$, soit $d = c - 2$, et $L_1 - L_4$ donne $c - b = 3$, soit $b = c - 3$. En reportant dans la première équation, on a donc $c - 3 + 2c + c - 2 = 31$, soit $c = 9$, dont on déduit que $b = 6$ et $d = 7$. Comme $a + b + c + d = 30$, on a donc $a = 8$, et il ne reste plus qu'à vérifier que la dernière équation est bien satisfaite par ces valeurs (ce qui est heureusement le cas). Les coefficients sont donc 8 pour les maths, 6 pour les langues, 9 pour le français et 7 pour l'AEHSC.

Exercice 4 (***)

$$1. \begin{cases} (1-m)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+m)y + 3z = 0 \\ x + y - (2+m)z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{cases} x + y - (2+m)z = 0 \\ -2x - (3+m)y + 3z = 0 \\ (1-m)x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} (1-m)x + 2y - z = 0 \\ (-1-m)y - (1+2m)z = 0 \\ (-1-m)y + (1-(1-m)(2+m))z = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1 - (1-m)(2+m) + 1 + 2m)z = 0$, soit $(1 - 2 - m + 2m + m^2 + 1 + 2m)z = (m^2 + 3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m = -3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

soit $y = -\frac{5}{2}z$ puis $x = \frac{1}{4}(z - 2y) = \frac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m = -1$, on a $z = 0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x + 2y - z = 0$, soit $x = -y$, donc $\mathcal{S} = \{(-y; y; 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$$2. \begin{cases} 2mx + (m-1)y + (5-m)z = 0 \\ (m-1)x + 2my + (m+7)z = 0 \end{cases}$$

Additionnons les deux équations, on obtient $(3m-1)x + (3m-1)y + 2z = 0$; soustrayons-les et on a $(m+1)x - (m+1)y - 2(m+1)z = 0$. Si $m \neq -1$, la deuxième équation se simplifie en $x - y - 2z = 0$, donc $2z = x - y$, et en reportant dans la première on a $3mx + (3m-2)y = 0$. Si $m \neq 0$, on en déduit que $x = \frac{2-3m}{3m}y$, et $z = \frac{x-y}{2} = \frac{1-3m}{3m}y$, et $\mathcal{S} = \{(\frac{2-3m}{3m}y; y; \frac{1-3m}{3m}y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = -1$, le système se réduit à l'équation $-2x - 2y + 6z = 0$, donc $\mathcal{S} = \{(x; y; \frac{1}{3}(x+y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, si $m = 0$, les deux équations sont $-y + 5z = 0$, soit $y = -5z$, et $-x + 7z = 0$, soit $x = 7z$, donc $\mathcal{S} = \{(7z; -5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Pour le troisième, quelques petites astuces de calcul évitent de trop se fatiguer :

$$3. \begin{cases} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2mx & + & 2my & + & mz & = & m \end{cases}$$

Si $m \neq 0$, on peut simplifier la dernière équation, puis faire $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\begin{cases} (m-2)x & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

Reste à faire $L_1 \leftarrow (m-2)L_2 - 2L_1$, ce qui donne $(m-2)^2z - 4z = (m-2)^2 - 4$, soit $m(m-4)z = m(m-4)$. Si $m \neq 4$ (on a déjà retiré la valeur 0), on a $z = 1$, d'où on déduit $x = 0$, puis $y = 0$. La seule solution est alors le triplet $(0; 0; 1)$.

Dans le cas particulier $m = 0$, le système est :

$$\begin{cases} 2y & + & 3z & = & 3 \\ -x & + & z & = & 1 \\ x & - & z & = & -1 \end{cases}$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes et donnent $x = z - 1$, puis la première donne $y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(z - 1; \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Dans le cas particulier $m = 4$, reprenons le système obtenu plus haut :

$$\begin{cases} 2x & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

On a alors $x = 1 - z$, et $2y = 1 - 2x - z = -1 + z$, donc $\mathcal{S} = \{(1 - z; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5 (***)

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$$

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & 2y & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5$$

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array} \right.$$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.