Feuille d'exercices n°19 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 mars 2011

Exercice 1 (**)

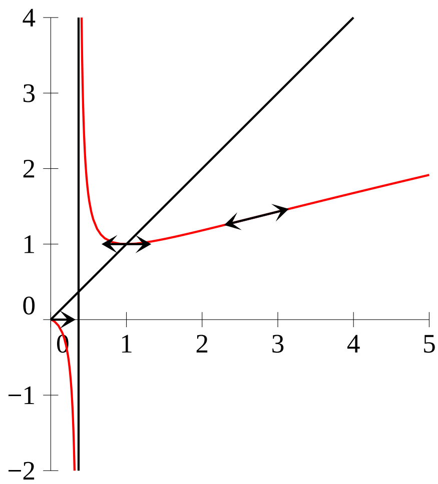
1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \frac{1}{4}(2-4) = \frac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq -\frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2}$ et $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1;2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1); f(2)] = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right] \subset [1;2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1;2]$, et si $u_n \in [1;2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1;2]$, soit $u_{n+1} \in [1;2]$. Comme $u_n \in [1;2]$ et $\sqrt{2} \in [1;2]$, et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence $P_n : |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1 - \sqrt{2}| \leq 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leq |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.
5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n \ln 2 \leq -9 \ln 10$, ou encore $n \geq \frac{9 \ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. Remarque : en pratique, on constate que le u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 2 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (c'est

pas exemple équivalent en 0 à $\frac{1}{\ln x}$). D'après le théorème de prolongement C^1, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On a par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée), et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté non plus, il suffit de constater que $\ln x + 1$ est négatif à gauche de $\frac{1}{e}$ et positif à droite). Les plus courageux calculeront $f''(x) = \frac{1}{x(\ln x+1)^2} - \frac{2\ln(x)}{x(\ln x+1)^3} = \frac{1-\ln x}{x(\ln x+1)^3}$ (j'ai dérivé le quotient comme le produit de $\ln x$ et de $\frac{1}{(\ln x+1)^2}$ car c'est un peu plus facile à écrire), et en déduiront que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = e$, de hauteur $f(e) = \frac{e}{2}$, et dont la tangente a pour pente $f'(e) = \frac{1}{4}$. On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si l'on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x+1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.

4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geq 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leq g(\ln x) \leq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1; +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geq 1$, et en supposant $x_n \geq 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1; +\infty[$, $f(x_n) \geq f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geq 1$, ce qui achève la récurrence.

   On a donc $1 \in [1; +\infty[$ et $x_n \in [1; +\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leq |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$.

Prouvons ensuite par récurrence la propriété $P_n : |x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2 - 1| \leq 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leq |x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 3 (**)

1. Posons $g(x) = e^x - 3 - 2x$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x - 2$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ (et même un peu au-delà). Comme $g(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}_-$ vers $[-2; +\infty[$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution négative α. Comme $e^\alpha - 3 = 2\alpha$, on a bien $f(\alpha) = \alpha$.
2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = -\frac{1}{2}$, donc $\forall x \leq 0$, $f(x) \leq -\frac{1}{2}$, ce qui prouve la stabilité de l'intervalle $]-\infty; 0]$ par f.
3. On a $f'(x) = \frac{e^x}{2}$, donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ quand $x \leq 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée.
4. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq 0$ d'après la question 2. Par principe de récurrence, tous les termes de la suite sont donc négatifs.
5. Vous devez commencer à avoir l'habitude : $\alpha \leq 0$, $u_n \leq 0$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ quand $x \leq 0$, donc l'IAF nous donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. C'est la récurrence classique, on pose $P_n : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. La propriété P_0 prétend que $|-1-\alpha| \leq 1$, (pour une fois, ce n'est pas totalement évidemment), soit $\alpha \in [-2; 0]$. On sait déjà que $\alpha \leq 0$. Pour prouver l'autre inégalité, revenons à la question 1 et calculons $g(-2) = e^{-2} - 3 + 4 = 1 + e^{-2} > 0$. Comme $g(-2) > g(\alpha)$ (qui vaut 0 par hypothèse), la décroissante de la fonction g nous donne bien $\alpha \geq -2$. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$, ce qui prouve P_{n+1} (plus de détails sur ce genre de récurrence dans le corrigé de l'exercice 1).
7. Cf exercice 1 : par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
8. ```
PROGRAM alpha;
USES wincrt;
VAR u,a,e : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée');
ReadLn(e);
u := -1; a := 1;
REPEAT
u := (exp(u)-3)/2;
a := a/2;
UNTIL a<e;
WriteLn('Une valeur approchée de alpha à ',e,' près est ',u);
END.
```
Pour les curieux, on obtient $\alpha \simeq -1.373$.
```

Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

1. (a) La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles, et de plus on sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$. La fonction est donc également continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

   (b) Pour le caractère C^1, cf la question précédente. De plus, $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$.

   (c) En utilisant le résultat donné par l'énoncé, $e^x-1-xe^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}-1-x-x^2-o(x^2)$ (pour xe^x, on a multiplié le développement limité précédent par x, en supprimant le terme $\dfrac{x^3}{2}$ qui est un $o(x^2)$), soit $e^x-1-x^2=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$. on a donc $f'(x)\underset{0}{\sim}-\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

   (d) En appliquant le théorème de prolongement C^1, on peut en déduire que f est dérivable en 0, et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

   (e) Ca, on peut le faire sans problème ; $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{e^{2x}-2e^x+1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{-xe^x}{e^{2x}}\sim-\dfrac{x}{e^x}$, donc par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0^-$.

2. (a) On a déjà prouvé le caractère C^2, et de plus $f'=u\times\dfrac{1}{v^2}$, avec $u(x)=e^x-1-xe^x$ et $v(x)=e^x-1$. En dérivant f' comme un produit, on a donc $f''=\dfrac{u'}{v^2}-\dfrac{2uv'}{v^3}$, soit $f''(x)=\dfrac{e^x-e^x-xe^x}{(e^x-1)^2}-\dfrac{2(e^x-1-xe^x)e^x}{(e^x-1)^3}=\dfrac{-xe^x(e^x-1)-2e^x(e^x-1-xe^x)}{(e^x-1)^3}=\dfrac{e^x(-xe^x+x-2e^x+2+2xe^x)}{(e^x-1)^3}=\dfrac{e^x(xe^x-2e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}$.

   (b) La fonction g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x)=e^x+xe^x-2e^x+1=xe^x-e^x+1$; $g''(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$, donc $g''\geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, d'où le tableau de variations suivant :

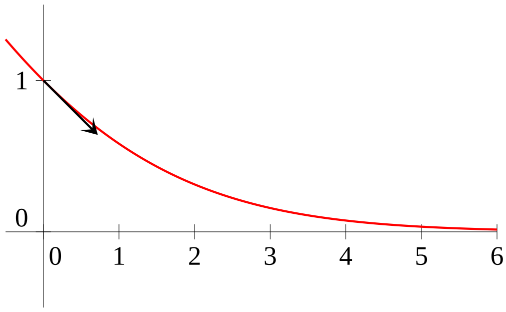
x	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$

   La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme les autres facteurs intervenant dans f'' sont aussi positifs (sur $\mathbb{R}_+$, $e^x\geq 1$, donc $(e^x-1)^3\geq 0$), la fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) D'après la question précédente, la fontion f' est croissante, comme elle tend vers 0^- en $+\infty$, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_+$, et f est donc décroissante. De plus, $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1	
	$\searrow$	
		0

(d) L'allure de la courbe est la suivante :



3. (a) Il suffit de reprendre le tableau de variations de f' pour constater que $\forall x \geq 0$, $0 \geq f'(x) \geq f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, et que $0 \leq f(x) \leq f(0) = 1$.

   (b) L'équation donne $x = x(e^x - 1)$, soit $x(e^x - 2) = 0$, donc $e^x = 2$ (puisque $x = 0$ n'est pas un point fixe), et le seul point fixe de f est donc $x = \ln 2$.

   (c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on peut appliquer l'IAF à f sur $\mathbb{R}_+$ et obtenir que, $\forall (x, y) \geq 0$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$. On peut prendre $y = \ln 2$ et $x = u_n$ car u_n est toujours positif (c'est vrai pour u_0, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est positif car f ne prend que des valeurs positives), donc, comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.

   (d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln 2| \leq \dfrac{1}{2^n}$. C'est vrai pour u_0 car $\ln 2 \leq 1$, et en supposant le résultat vrai pour u_n, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2| \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ln 2| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 5 (***)

Commençons par étudier la fonction f : elle est C^∞, impaire, et $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 3)(3x^2 + 1) - 6x(x^3 + 3x)}{(3x^2 + 1)^2} = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 3}{(3x^2 + 1)^2} = \dfrac{3(x^2 - 1)^2}{(3x^2 + 1)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cherchons ses points fixes : $f(x) = x$ se ramène, en simplifiant par x (et en notant au passage que 0 est un point fixe), à $\dfrac{x^2 + 3}{3x^2 + 1} = 1$, soit $x^2 + 3 = 3x^2 + 1$, donc $2x^2 = 2$, ce qui se produit pour $x = 1$ et $x = -1$. Il y a donc trois points fixes : $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Chacun des quatre intervalles $]-\infty; -1]$; $[-1; 0]$; $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ est donc stable par f. De plus, la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; 1]$, et en-dessous sur les deux autres intervalles.

On peut alors deviner le comportement de (u_n) selon les valeurs de u_0 :

- si $u_0 < -1$, la suite sera croissante, majorée par -1, donc convergera. Le seul point fixe de l'intervalle étant -1, on aura $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.
- si $u_0 = -1$, la suite est constante égale à -1.
- si $-1 < u_0 < 0$, la suite sera décroissante, minorée par -1, et convergera nécessairement vers -1.
- si $u_0 = 0$, la suite est nulle.
- si $0 < u_0 < 1$, la suite sera croissante, majorée par 1, et convergera vers 1.
- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 1$, la suite est décroissante, minorée par 1, elle converge vers 1.

Prouvons par exemple la convergence dans le cas où $u_0 \in]0;1[$ (les autres sont très similaires). La fonction f étant strictement croissante sur $]0;1[$, on a $\forall x \in]0;1[$, $f(x) \in]f(0);f(1)[=]0;1[$. Une récurrence élémentaire permet alors de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]0;1[$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in]0;1[$, $f(u_n) \in]0;1[$, soit $u_{n+1} \in]0;1[$, ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, on a $f(x) = x\dfrac{x^2+3}{3x^2+1}$. Quand $0 < x < 1$, $0 < x^2 < 1$, donc $0 < 2x^2 < 2$ puis en ajoutant x^2+1 de chaque côté, $3x^2+1 < x^2+3$. Tous ces nombres étant par ailleurs positifs, on a alors $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} > 1$, d'où $f(x) > x$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers un point fixe de la fonction. Sa limite appartient par ailleurs à l'intervalle $[0;1]$, donc ne peut être égale qu'à 0 ou 1. On peut exclure 0 car, la suite étant croissante, $u_n \geq u_0$, donc la limite de la suite est supérieure ou égale à u_0 et ne peut donc être nulle. Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque : ici, appliquer l'IAF est assez peu intéressant...