

Feuilles d'exercices n°4 : Suites particulières

ECE3 Lycée Carnot

5 octobre 2010

Exercice 1 (*)

Un classique du rire : la comparaison entre suite arithmétique et suite géométrique.

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 5% par an ; le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 3% par an. On note (u_n) et (v_n) les suites donnant la somme épargnée au bout de n années. Déterminer la nature de (u_n) et de (v_n) , donner la valeur de u_n et v_n en fonction de n , puis déterminer au bout de combien d'années le placement B devient plus intéressant que le placement A (vous ne pouvez pas faire une résolution exacte, procédez à tâtons en calculant les valeurs des termes de chaque suite). Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 2 (***)

Trois réels a , b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q .
- a , $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a , b , c et q .

Exercice 3 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$. Déterminer trois réels a , b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n .

Exercice 4 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de v_n puis de u_n .

Exercice 5 (***)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Construire à partir de (u_n) et de (v_n) deux nouvelles suites de type bien connu, calculer la valeur de ces deux suites et en déduire celle de u_n et de v_n .

Exercice 6 (**)

Un type de placement un peu plus rigolo que ceux de l'exercice 1 :

Un épargnant place une somme de 3 000 euros sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés. Qui plus est, ce même épargnant rajoute chaque année un placement ponctuel de 1 000 euros supplémentaires sur ce même compte. On note u_n la somme épargnée au bout de n années. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) , en déduire de quel type de suite il s'agit, puis déterminer la valeur de u_n en fonction de n . Au bout de combien de temps notre épargnant disposera-t-il de 30 000 euros ? Combien aura-t-il alors déposé au total sur ce compte ?

Exercice 7 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 16$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie et d'un type bien connu. Calculer v_n et en déduire la valeur de u_n (ne vous inquiétez pas si c'est assez moche !).

Exercice 8 (*)

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n$

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
4. En déduire la valeur de u_n .

Exercice 10 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + 2u_0$. Déterminer la valeur de u_n (mais si, regardez mieux, c'est une suite d'un type qu'on maîtrise, il y a juste une petite modification à faire).

Exercice 11 (***)

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la récurrence non linéaire $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.
2. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est alors d'un type bien connu, et en déduire la valeur de z_n puis celle de u_n (en fonction des premières valeurs de la suite).