

Feuilles d'exercices n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 novembre 2010

Exercice 1 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante.
2. Faux, par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. L'énoncé n'était pas vraiment celui que je voulais mettre, mais c'est faux de toute façon.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 2 (* à **)

La correction de cet exercice est rédigée à l'aide d'équivalents, qui n'avaient pas encore été vus au moment où nous avons fait cet exercice en classe, mais c'est de toute façon une bonne idée de le reprendre avec le formalisme des équivalents.

- $2^n - 3^n + 4^n \sim 4^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n + 4^n = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + 2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $2^n - e^{2n} + 1 \sim -e^{2n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - e^{2n} + 1 = -\infty$.
- $\frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n + e^{-3n} = +\infty$ (il n'y a même pas de forme indéterminée ici).
- $\frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2} \sim \frac{2\sqrt{n}}{-3n} \sim -\frac{2}{3\sqrt{n}}$, donc la limite vaut 0.
- $\sqrt{n^2 - 1} - n = \frac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = -\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} + n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n = 0$.
- $\frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = \frac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est nulle.

Exercice 3 (**)

1. C'est une récurrence facile : $u_0 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$, et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est également strictement positif (et bien défini puisque u_n n'est pas nul).

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est strictement croissante.
3. Notons P_n la propriété $u_n^2 \geq 2n + u_0^2$. pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0^2 \geq u_0^2$, ce qui est manifestement vrai. Supposons donc, pour un certain entier n , que P_n est vrai. On a alors $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2u_n \times \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\frac{1}{u_n^2} > 0$, on obtient $u_{n+1}^2 > 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$, ce qui prouve exactement la propriété P_{n+1} . D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n .
- La suite (u_n^2) étant minorée par une suite arithmétique de limite $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$. Et u_n étant toujours positif, on peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (***)

1. On veut montrer, en passant à l'exponentielle, que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) \ln \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \geq n \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right)$, ce qui découle du fait que la fonction $f : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x \ln \frac{x+a}{x} = x \ln(x+a) - x \ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \frac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{x+a-x}{(x+a)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction f' est donc toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante (ouf...).
2. Le plus simple est de faire deux petites études de fonction : posons sur $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0 , mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $\ln(1+t) \leq t$ sur $\mathbb{R}_+$.
- De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geq 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.
3. On a $\ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \frac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $n \times \frac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \leq \ln u_n \leq n \times \frac{a}{n}$, qu'il suffit de simplifier pour obtenir le résultat demandé.
4. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na}{n+a} = a$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a . La suite (u_n) a donc pour limite e^a .
5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 5 (**)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{2n + n^2 - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Exercice 6 (**)

1. Le terme d'indice n de la suite est constitué d'une somme de n réels dont le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$ et le plus gros $\frac{n}{n^2+1}$. On en déduit que $n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$, d'où l'encadrement demandé.
2. Les deux suites extrêmes ayant pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (***)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1} . Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geq 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leq v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leq v_n \leq v_0$ puisque la suite (v_n) est décroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l . De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l' . La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l' , mais comme $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on a donc $l' = \frac{l + l'}{2}$, d'où $\frac{l'}{2} = \frac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 8 (***)

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut que u_n ne soit jamais égal à 1. C'est le cas pour u_0 , mais il n'est pas facile de s'en sortir par récurrence ensuite. Constatons que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n^2 + 1 = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 - u_n + 2 = 0$, équation qui a un discriminant négatif et n'admet donc pas de solution. Autrement dit, on ne peut jamais tomber sur la valeur 1 avec cette relation de récurrence, et la suite est donc bien définie.
2. La fonction f admet pour dérivée $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 8$ et admet deux racines $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. La

fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; 1 - \sqrt{2}]$ et sur $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[1 - \sqrt{2}; 1[$ et sur $]1; 1 + \sqrt{2}]$. Elle admet un maximum local en $1 - \sqrt{2}$ qui vaut $\frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}$; et un minimum local en $1 + \sqrt{2}$ qui vaut $\frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2$.

3. On a $f(x) - x = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$, et on a vu plus haut que le numérateur ne s'annulait jamais, ce dont on déduit qu'il est toujours positif. Si $x < 1$, $f(x)$ est donc inférieur à x , et $f(x) > x$ si $x > 1$.
4. Une récurrence facile permet de prouver que $u_n \geq 2\sqrt{2} + 2$ dès que $n \geq 1$. C'est vrai pour u_1 car $u_1 = f(u_0)$ et que la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ est $2\sqrt{2} + 2$ (question 2). Si on suppose désormais $u_n \geq 2\sqrt{2} + 2$, on a a fortiori $u_n > 1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq 2\sqrt{2} + 2$, ce qui achève la récurrence. Comme on a toujours $f(x) > x$ quand $x > 1$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n , et donc que la suite est strictement croissante. Si elle était convergente, sa limite l vérifierait $f(l) = l$, ce qui n'est pas possible puisque cette équation n'a pas de solution. La suite ne peut donc pas converger; comme elle est croissante, cela signifie que (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.
5. Le principe est exactement le même : on prouve par récurrence que $\forall n \geq 1, u_n \leq 2 - 2\sqrt{2}$ (qui est négatif, donc très inférieur à 1), on en déduit que la suite est décroissante puisque $f(x) < x$ sur l'intervalle où se situent les valeurs de la suite, et enfin que la suite ne peut pas converger, donc diverge vers $-\infty$.

Exercice 9 (*)

1. $\frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12} \sim \frac{2n^7}{n^8} \sim \frac{2}{n}$
2. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1)} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}$
3. $\frac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \sim \frac{n^2}{n} \sim n$
4. $e^{-n} + e^{-2n} \sim e^{-n}$
5. $\frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)} \sim \frac{e^{3n}}{n^2}$
6. $\frac{1}{n^2} + e^{-3n} \sim \frac{1}{n^2}$
7. $\ln\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
8. Attention à ne pas dire utiliser trop précipitamment l'équivalent vu en cours pour $\ln(1 + u_n)$, puisque n^3 ne tend pas vraiment vers 0. Il faut plutôt factoriser : $\ln(1 + n^3) = \ln(n^3) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$. Le deuxièmeporceau tendant vers 0 et le premier vers $+\infty$, $u_n \sim \ln(n^3) \sim 3 \ln n$.
9. $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n^2})}$. Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim n \times \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$. On ne peut pas passer cet équivalent à l'exponentielle, mais on peut en déduire que la suite (u_n) tend vers 1 (ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0), donc $u_n \sim 1$.

Exercice 10 (**)

- En effet, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$, on a $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2.
- En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2 \sum_{k=1}^{k=n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n$.
Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1} - 1) = 2\sqrt{n+1} - 2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).
- Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$, donc a fortiori $S_n \geq 2\sqrt{n} - 2$, donc $u_n \geq -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.
- Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - 2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 11 (d'après EML) (**)

- Étudier une fonction de second degré ne devrait pas poser trop de problème : $f'(x) = 2x + 4$ s'annule en -2 , la fonction est donc strictement décroissante sur $] -\infty; -2]$ et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme $f(-2) = -2$, on en déduit que tous les réels strictement supérieurs à -2 ont deux antécédents par f , tous ceux strictement inférieurs à -2 n'ont pas d'antécédent, et -2 a un unique antécédent, à savoir -2 . En particulier, $f(x) = -1$ équivaut à $x^2 + 4x + 3 = 0$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux solutions $x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$.
- Si la suite est stationnaire, c'est qu'il existe une valeur de n à partir de laquelle les termes sont constants, et en particulier pour laquelle $u_n = u_{n+1}$, donc $u_n = f(u_n)$. Or, $f(x) = x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et pour solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ (on savait déjà que ces deux valeurs étaient solutions de l'équation après les calculs de la première question). Conclusion, on a nécessairement $u_n = -2$ ou $u_n = -1$. Mais comme $u_n = f(u_{n-1})$, u_{n-1} doit être un antécédent de -2 ou de -1 , c'est-à-dire être égal à -2 , -3 ou -1 (toujours d'après la question précédente). Mais alors u_{n-2} doit lui-même être un antécédent de -1 ou de -2 (pour -3 il n'y a pas d'antécédent) donc égal à -1 , -2 ou -3 etc ; jusqu'à être remonté à u_0 . Pour rédiger ce raisonnement de façon rigoureuse, deux solutions : soit on fait une récurrence descendente (on part de u_n pour revenir à u_0 , un peu inhabituel), soit on fait une récurrence classique visant à montrer que, si $u_0 \notin \{-3; -2; -1\}$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-3; -2; -1\}$, ce qui prouve que, si u_0 n'est pas une des trois valeurs en question, la suite n'est pas stationnaire. Autrement dit, on prouve la contraposée de ce qui est demandé dans cette question. La récurrence ne pose pas de problème particulier, et les trois valeurs initiales pour lesquelles la suite stationne sont donc -1 (suite constante égale à -1), -2 (suite constante égale à -2) et -3 (suite stationnaire à -1 à partir du rang 1).
- C'est un calcul tout bête : $u_{n+1} + 2 = f(u_n) + 2 = u_n^2 + 4u_n + 2 + 2 = (u_n + 2)^2$. Posons $v_n = u_n + 2$ pour plus de clarté, on a donc $v_{n+1} = v_n^2$. La suite (v_n) prend donc des valeurs positives à partir de v_1 , et une récurrence simple montre que, si $v_1 > 1$, alors (v_n) ne prend que

des valeurs supérieures à 1 et sera strictement croissante ; au contraire, si $v_1 < 1$, alors v_n sera toujours inférieur à 1 et la suite sera strictement décroissante. Dans ce deuxième cas, (v_n) est décroissante minorée, donc converge vers un réel l vérifiant $l = l^2$, donc égal à 0 ou 1. Comme $v_n \leq v_1 < 1$, on en déduit que (v_n) converge vers 0. Par contre, si $v_1 > 1$, la suite ne peut pas converger vers 0 ou 1 ; étant croissante elle diverge donc vers $+\infty$. On aura $v_1 < 1$ si $v_0^2 < 1$, c'est-à-dire si $v_0 \in]-1; 1[$.

Ne reste plus qu'à revenir à $u_n = v_n - 2$. Si $u_0 \in]-3; -1[$, $v_0 \in]-1; 1[$, donc la suite (v_n) converge vers 0, et (u_n) converge vers -2 . Si $u_0 = -3$ ou $u_0 = -1$, on a déjà vu que la suite était stationnaire. Enfin, si $u_0 < -3$ ou $u_0 > -1$, on aura $v_1 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 12 (d'après EDHEC) (***)

1. Calculons donc la dérivée $f'_n(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n .
2. Comme de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(n) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\frac{u_n^5}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 13 (***)

1. La suite (a_n) est croissante (en effet, le plus grand des $n + 1$ premiers termes de la suite est nécessairement plus grand que le plus grand des n premiers) et majorée par n'importe quel majorant de (u_n) , donc elle converge. De même, (b_n) est décroissante et minorée par les minorants de (u_n) donc converge également.
2. On a assez clairement $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$. Si jamais il existe un entier n_0 pour lequel $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq a_{n_0}$ (puisque la suite est croissante), et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq b_{n_0}$, donc les deux suites auront des limites distinctes. Autrement dit, pour que les suites aient la même limite, on doit avoir $a_n = b_n$ pour tout entier n , c'est-à-dire que le maximum et le minimum des n premiers termes de la suite (u_n) sont toujours égaux. Ceci n'est possible que si tous ces termes sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand (u_n) est une suite constante.
3. La suite (c_n) n'est pas toujours convergente, même lorsque (u_n) est bornée. Prenons par exemple la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est une puissance de 10 et 0 sinon (autrement dit $u_{10} = u_{100} = u_{1000} = \dots = 1$ et tous les autres termes sont nuls). Si l'on regarde la suite (c_n) , elle est constituée de termes valant tous 0 ou 1, mais n'est pas stationnaire (on a par exemple $c_{10^k} = 1$ mais $c_{10^k+1} = 0$ car il n'y a pas de puissance de 10 entre $10^k + 1$ et $2(10^k + 1)$), donc ne peut pas converger.

Exercice 14 (****)

Supposons donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \varepsilon$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n , mais n_0 , lui, est fixé), donc, quand on la divise par n , ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k \right| < \varepsilon$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui sont tous inférieurs (en valeur absolue) à ε , donc sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0)\varepsilon$, d'où $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k \right| \leq \frac{n - n_0}{n} \varepsilon \leq \varepsilon$ (puisque $\frac{n - n_0}{n} \leq 1$). Conclusion, lorsque $n \geq \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n) .

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxiliaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (u_k - l) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} u_k - nl \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k \right) - l$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver. Note finale : ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesaro, il stipule que la moyenne des n premiers termes d'une suite convergente a la même limite que la suite elle-même.

Problème 1 (Ecricome 99) (***)

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$, et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$. Le terme général de la suite est donc de la forme $x_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)^{\frac{n}{6}} + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right)^{\frac{n}{6}}$.
2. Les deux racines x_1 et x_2 étant comprises strictement entre -1 et 1 , la suite (x_n) est une somme de deux suites convergeant vers 0, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Question 1

1.a : Prouvons donc par récurrence double la propriété $P_n : u_n \geq 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ par hypothèse. Supposons désormais la propriété vérifiée par u_n et u_{n+1} . On a alors $\sqrt{u_n} \geq 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geq 1$, donc $u_{n+2} \geq 1 + 1 = 2$ et a fortiori $u_{n+2} \geq 1$, ce qui achève la récurrence.

1.b : PROGRAM valeurs ;

USES winert ;

VAR a,b,u,v,w : real ; i,n : integer ;

BEGIN

WriteLn('Choisissez des valeurs supérieures à 1 pour les réels a et b') ;

ReadLn(a,b) ;

WriteLn('Choisissez une valeur supérieure à 2 pour l'entier n') ;

```

ReadLn(n);
u := a; v := b;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
w := sqrt(u)+sqrt(v);
u := v;
v := w;
END;
WriteLn('La valeur de u',n,' est ',v);
END.

```

Question 2

2.a : D'après la définition de v_n , on a $2(v_n + 1) = \sqrt{u_n}$, ou encore $4(v_n + 1)^2 = u_n$, soit $u_n = 4v_n^2 + 8v_n + 4$. Si la suite (v_n) converge vers 0, on en déduit bien, par somme de limites, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

2.b : Calculons donc $\frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{u_{n+2} - 4}{4(2 + v_{n+2})} = \frac{4v_{n+2}^2 + 8v_{n+2}}{8 + 4v_{n+2}} = v_{n+2}$ (on a utilisé le calcul de la question précédente). On a donc $|v_{n+2}| = \frac{|v_{n+1} + v_n|}{2|2 + v_{n+2}|}$. Or, on sait que $|v_{n+1} + v_n| \leq |v_{n+1}| + |v_n|$ (inégalité triangulaire) et d'autre part que $u_n \geq 1$, donc $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \geq -\frac{1}{2}$. On peut en déduire que $2 + v_{n+2} \geq \frac{3}{2}$, d'où finalement $|v_{n+2}| \leq \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

2.c : C'est une récurrence double, mais assez simple malgré tout : notons P_n la propriété $|v_n| \leq x_n$. Par hypothèse, P_0 et P_1 sont vraies (on a même égalité), et, si on suppose à la fois $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$, on a alors, en utilisant le résultat de la question précédente, $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|) \leq \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n) = x_{n+2}$, donc on a bien $|v_{n+2}| \leq x_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

Comme on sait (question préliminaire du problème) que (x_n) converge vers 0, et que par ailleurs $|v_n| \geq 0$ (comme toute valeur absolue qui se respecte), on peut conclure du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = 0$. Si la valeur absolue de (v_n) tend vers 0, (v_n) également, et la question 2.a nous permet donc d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Problème 2 (Maths III HEC/ESCP 2002) (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

(b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2. PROGRAM suites;
 USES wincrt;
 VAR i,j,n : integer; w : real;
 BEGIN

```

WriteLn('Choisissez l'entier n');
readLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
w := 0;
FOR j := 0 TO i DO w := w+ln(j+1)/(i-j+1);
END;
END.

```

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) On calcule
$$\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$$
, donc l'inégalité demandée est vraie.

(b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \dots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \dots + u_n) v_n = u_0 v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leq u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n) , la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leq v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leq 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1} v_0 \leq v_{n+1} u_0 + v_{n+1} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1} v_0 \leq 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n) , ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n+1} = 0$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les termes pairs de la suite sont inférieurs à ε , et un entier n_1 à partir duquel tous les termes impairs aussi. Quand n est plus grand que le plus grand de ces deux entiers, tous les termes de la suite deviennent donc inférieurs à ε , ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leq |(u' \times v)_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| =$

$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \geq a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A . Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A .
2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
 (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.
3. (a) Calculons donc, pour $n \geq 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leq 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.
 (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n , alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$, et la récurrence achevée. Ce calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.
 (c) La suite (u_n) convergeant vers l , la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n) , donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.
 (d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
 La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}l$.